



# 《复变函数》习题解答

作者: *FAB*

版本: 1.0

时间: 2025年6月29日

二三级数学与应用数学

安徽大学数学科学学院



本作品采用知识共享署名 4.0 国际许可协议进行许可。访问 <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/> 查看该许可协议。

# 目录

|          |                          |           |
|----------|--------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>复数与复变函数</b>           | <b>1</b>  |
| 1.1      | 复数的定义及其运算                | 1         |
| 1.2      | 复数的几何表示                  | 5         |
| 1.3      | 扩充平面和复数的球面表示             | 13        |
| 1.4      | 复数列的极限                   | 16        |
| 1.5      | 开集,闭集和紧集                 | 20        |
| 1.6      | 曲线和域                     | 25        |
| 1.7      | 复变函数的极限和连续性              | 27        |
| <b>2</b> | <b>全纯函数</b>              | <b>32</b> |
| 2.1      | 复变函数的导数                  | 32        |
| 2.2      | Cauchy-Riemann方程         | 34        |
| 2.3      | 导数的几何意义                  | 42        |
| 2.4      | 初等全纯函数                   | 44        |
| 2.5      | 分式线性变换                   | 53        |
| <b>3</b> | <b>全纯函数的积分表示</b>         | <b>65</b> |
| 3.1      | 复变函数的积分                  | 65        |
| 3.2      | Cauchy积分定理               | 71        |
| 3.3      | 全纯函数的原函数                 | 75        |
| 3.4      | Cauchy积分公式               | 77        |
| 3.5      | Cauchy积分公式的一些重要推论        | 85        |
| 3.6      | 非齐次Cauchy积分公式            | 91        |
| 3.7      | 一维 $\bar{\partial}$ 问题的解 | 94        |
| <b>4</b> | <b>全纯函数的Taylor展开及其应用</b> | <b>98</b> |
| 4.1      | Weierstrass定理            | 98        |
| 4.2      | 幂级数                      | 106       |
| 4.3      | 全纯函数的Taylor展开            | 114       |
| 4.4      | 辐角原理和Rouché定理            | 124       |
| 4.5      | 最大模原理和Schwarz引理          | 134       |

|          |                                                    |            |
|----------|----------------------------------------------------|------------|
| <b>5</b> | <b>全纯函数的Laurent展开及其应用</b>                          | <b>154</b> |
| 5.1      | 全纯函数的Laurent展开                                     | 154        |
| 5.2      | 孤立奇点                                               | 166        |
| 5.3      | 整函数与亚纯函数                                           | 173        |
| 5.4      | 残数定理                                               | 178        |
| 5.5      | 利用残数定理计算定积分                                        | 194        |
| 5.6      | 一般域上的Mittag-Leffler定理、Weierstrass因子分解定理和插值定理       | 230        |
| 5.7      | 特殊域上的Mittag-Leffler定理、Weierstrass因子分解定理和Blaschke乘积 | 234        |
| <b>6</b> | <b>全纯开拓</b>                                        | <b>237</b> |
| 6.1      | Schwarz对称原理                                        | 237        |
| 6.2      | 幂函数的全纯开拓                                           | 240        |
| 6.3      | 多值全纯函数与单值性定理                                       | 242        |
| <b>7</b> | <b>共形映射</b>                                        | <b>243</b> |
| 7.1      | 正规族                                                | 243        |
| 7.2      | Riemann映射定理                                        | 245        |
| 7.3      | 边界对应定理                                             | 247        |
| 7.4      | Schwarz-Christoffel公式                              | 248        |
| <b>8</b> | <b>调和函数与次调和函数</b>                                  | <b>250</b> |
| 8.1      | 平均值公式与极值原理                                         | 250        |
| 8.2      | 圆盘上的Dirichlet问题                                    | 253        |
| 8.3      | 上半平面的Dirichlet问题                                   | 254        |
| 8.4      | 次调和函数                                              | 255        |
| <b>9</b> | <b>多复变数全纯函数与全纯映射</b>                               | <b>258</b> |
| 9.1      | 多复变数全纯函数的定义                                        | 258        |
| 9.2      | 多圆柱的Cauchy积分公式                                     | 259        |
| 9.3      | 全纯函数在Reinhardt域上的展开式                               | 260        |
| 9.4      | 全纯映射的导数                                            | 261        |
| 9.5      | Cartan定理                                           | 262        |
| 9.6      | 球的全纯自同构和Poincaré定理                                 | 263        |
|          | 索引                                                 | 267        |
|          | 参考文献                                               | 267        |

# 前言

---

史济怀，刘太顺老师的复变函数是一本极其优秀的书籍，几乎所有学习复变函数的人都会或多或少的阅读过此书，然而遗憾的是网上目前已有的答案习题解答相当少，仅有的答案不是排版混乱就是错误百出（当然这份答案也会有大量错误），再因为本人这学期正巧学习 $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 及复变函数，为了考试，或仅因个人兴趣，希望自己在互联网上能留下点什么东西。于是干脆直接尝试制作这个PDF。

随着AI的到来，按理而言学习应当事半功倍，但是恰恰相反。虽然很让人难过，但是我们学院学风不佳，大多认为学校配备的钟玉泉已经足够，更者为了绩点而四处奔波，花费大量时间在一堆乱七八糟的比赛中，从而没有时间去深入学习。这可能也与我们学校所秉持的“不考就不教”的原则有关，尽管笔者一向的主张是学校可以教的多，但是考试可以放低要求。不少同学仅仅是考前背下答案，到头来发现除了会背书上课后几个习题外什么也不会(其实我也没学的多好就是了)。总之，还是仁者见仁智者见智吧。

必须承认的一点是，自己制作答案是一件十分困难的事情，更何况此书习题难度并不小，但，就像你问我为什么要去爬山？“仅仅因为山就在那里”。在本PDF的制作中我也邀请了我的几个同学，但遗憾的是他们或认为这是件无意义的事或发现于绩点无益后婉拒，倘若大学仅仅以绩点为大而忽视基本的学习，属实是一种悲哀。正如我一开始提到的，这绝不是一项无意义的事，只要有人在学习复变函数，此书终会进入他的视线，也终会在网上寻找答案。总而言之，做你想要做的，并从中得到乐趣才是重要的。

一本合格的答案应该长什么样？就像书籍或者讲义一样，答案正确，步骤完整自不必说，同时笔者还认为应该讲清楚想法，内容尽量保持自完备，并提供众多的参考书籍辅以读者思考。本PDF的一大特色是综合了许多国内外标准的复分析或复变函数教材，并在正文中时不时引用相关的知识点，对这不感兴趣的读者可以跳过。但是本PDF终究仅是一个习题解答，不宜引入过多定理的证明，因此在引用时略去详细证明，相信读者会去原文中进行更深层次的学习。(绝对不是自己不会写才去抄书的(bushi)，另一大特点是力求书写符合思考逻辑的方式，大部分以口语化来解决问题，这也是原书写作中一贯的风格。

鉴于本PDF全部由本人完成，其中小部分利用了AI，不会的问题很多，本人对此PDF不

保证质量(目移)。此外，虽然我引用了Stein的书，但是它的中文翻译很烂，建议去看原版书。最后要指出的是笔者之前没有系统学过复变函数，正如在这本书的前言中所提到的”某些题目初学时做不出来也不必介意，待学完本课程后回过头来还可以再想”。但笔者是按照学校进度逐章完成的，一些题目的高深背景可能难以察觉，会引用后面一些已经清楚的定理的推论来解题，望读者不要介意。最后，欢迎各位关注笔者的[知乎](#)和[个人主页](#)，当然如果能在下面或者是主页上点点赞助请笔者喝一杯咖啡就更好了。最后安利几首歌:[僕が僕を愛せるように君が君を愛せるように](#). [海边城](#). [アイロニ](#). 这些歌词某种程度上反映了我在制作中的心态。

感谢我的 $\text{\LaTeX}$ 老师洪楠坤，他帮我更正了许多格式问题。感谢[向禹老师](#)关于题目的代码，节省了很多功夫。感谢我的复变函数老师万方舒，她帮我解答了一些学习中的问题。最后感谢[はつねみく](#), [初音ミク](#), [Hatsune Miku](#)，如果没有她的歌鼓励我，可能此PDF会成为我众多计划中的一个废稿。

最后再次声明下，笔者保留本文档的一切权利。特别地，允许并鼓励转发、传播本文档，但不能修改文档内容。在未经笔者允许的情况下，禁止将本文档用作商业用途。由于学校教学原因，这份答案肯定不会完整，加上后面的题目仅为了PDF的完整。时间仓促且本人水平欠佳，一定会有错误，若要勘误或完善，请发邮件[fab96163@163.com](mailto:fab96163@163.com)联系，万分感谢（逃）。

**Little tips:** 以上链接均采用#39C5BB混色。

*FAB*

2025年6月于安徽大学



看在这份答案这么用心的份上请孩子喝杯咖啡吧QWQ.

谨以此文  
纪念我的童年，  
那是一段小有遗憾的幸福时光。

# 第 1 章 复数与复变函数

## 1.1 复数的定义及其运算

1. 证明命题 1.1.3 的 (i), (ii), (iii), (v)

证明. 显然! 读者自证不难!

□

2. 设  $z_1, \dots, z_n$  是任意  $n$  个复数, 证明:

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|,$$

并给出不等式中等号成立的条件.

证明. 由

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

归纳即得. 显然取等号是所有  $z_i$  共线且同向.

□

3. 证明:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|) \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|.$$

证明. 令  $z = a + ib$ ,  $RHS$  显然,  $LHS$  等价于

$$a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

□

4. 若  $|z_1| = \lambda|z_2|, \lambda > 0$ , 证明:

$$|z_1 - \lambda^2 z_2| = \lambda|z_1 - z_2|.$$

证明. 两边平方, 左边为

$$|z_1|^2 - 2\lambda^2 \operatorname{Re} \overline{z_1} z_2 + \lambda^4 |z_2|^2$$

代入条件化简为

$$\lambda^2 |z_1 - z_2|^2$$

即证。 □

5. 设  $|a| < 1$ , 证明: 若  $|z| = 1$ , 则

$$\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = 1.$$

证明. 平方等价于  $|z - a|^2 = |1 - \bar{a}z|^2$ , 利用

$$|z - a|^2 = (z - a)(\bar{z} - \bar{a})$$

即证。 □

6. 设  $|a| < 1, |z| < 1$ , 证明:

(i)

$$\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| < 1$$

(ii)

$$1 - \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2}$$

(iii)

$$\frac{||z| - |a||}{1 - |a||z|} \leq \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leq \frac{|z| + |a|}{1 + |a||z|}.$$

证明. (i): 等价于  $|z|^2 - 2\operatorname{Re} \bar{a}a + |a|^2 \leq 1^2 - 2\operatorname{Re} \bar{a}z + |a|^2|z|^2$  即

$$1 - |a|^2 - |z|^2 + |a|^2|z|^2 = (1 - |a|^2)(1 - |z|^2) > 0$$

(ii): 即证明

$$|1 - \bar{a}z|^2 - |z - a|^2 = (1 - |a|^2)(1 - |z|^2)$$

而

$$LHS = 1 - |a|^2 - |z|^2 + |a|^2|z|^2$$

即证

(iii):

$$LHS \Leftrightarrow |1 - \bar{a}z| \leq 1 - |a||z| \Leftrightarrow |z|^2 + |a|^2 \geq 2|a||z|$$

$$RHS \Leftrightarrow |z|^2 + |a|^2 \geq 2|a||z|$$

证完。 □

7. 设  $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n$  是任意  $2n$  个复数, 证明复数形式的 **Lagrange** 等式:

$$\left| \sum_{j=1}^n z_j w_j \right|^2 = \left( \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n |w_j|^2 \right) - \sum_{1 \leq j < k \leq n} |z_j \bar{w}_k - z_k \bar{w}_j|^2,$$

并由此推出 **Cauchy** 不等式

$$\left| \sum_{j=1}^n z_j w_j \right|^2 \leq \left( \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n |w_j|^2 \right).$$

不等式中等号成立的条件是什么?

证明.

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & z_n \\ \bar{w}_1 & \cdots & \bar{w}_n \end{pmatrix}$$

则

$$|AA^T| = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^n |z_j|^2 & \sum_{j=1}^n z_j w_j \\ \sum_{j=1}^n \bar{z}_j \bar{w}_j & \sum_{j=1}^n |w_j|^2 \end{vmatrix} \geq 0$$

其中 *LHS* 展开每一项形如

$$\begin{vmatrix} z_j & z_k \\ \bar{w}_j & \bar{w}_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{z}_j & w_j \\ \bar{z}_k & w_k \end{vmatrix} = |z_j \bar{w}_k - z_k \bar{w}_j|^2 \geq 0$$

□

8. 设  $z_1, \dots, z_n$  是任意  $n$  个复数, 证明必有  $\{1, 2, \dots, n\}$  的子集  $E$ , 使得<sup>1</sup>

$$\left| \sum_{j \in E} z_j \right| \geq \frac{1}{6} \sum_{j=1}^n |z_j|.$$

证明. (i): 当  $z_i \in \mathbb{R}$  时, 考虑反证法. 定义  $E = \{k | z_k \geq 0\}, F = \{k | z_k < 0\}$  若

$$\left| \sum_{j \in E} z_j \right| < \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |z_j|, \left| \sum_{j \in F} z_j \right| < \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |z_j|.$$

则

$$\sum_{j=1}^n |z_j| = \sum_{j \in E} |z_j| + \sum_{j \in F} (-z_j) = \left| \sum_{j \in E} z_j \right| + \left| \sum_{j \in F} z_j \right| < \sum_{j=1}^n |z_j|$$

<sup>1</sup> 当  $z_i \in \mathbb{R}$  时, 系数可改为  $\frac{1}{2}$ ,  $z_i \in \mathbb{C}$  时, 系数最佳为  $\frac{1}{\pi}$

矛盾!

(ii):我们先给一个 $\frac{1}{4}$ 的证明,以方便理解下一个证明。我们类比 $\mathbb{R}$ 的情形,考虑定义

$$\begin{cases} I_1 = \sum_{\operatorname{Re} z_j > 0} \operatorname{Re} z_j, \\ I_2 = \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname{Im} z_j, \\ I_3 = \sum_{\operatorname{Re} z_j < 0} |\operatorname{Re} z_j|, \\ I_4 = \sum_{\operatorname{Im} z_j < 0} |\operatorname{Im} z_j|. \end{cases}$$

则

$$\sum_{j=1}^n |z_j| \leq \sum_{j=1}^n |\operatorname{Re} z_j| + \sum_{j=1}^n |\operatorname{Im} z_j| = \sum_{i=1}^4 I_i \leq 4 \max_{1 \leq i \leq 4} I_i$$

不妨设 $\max_{1 \leq i \leq 4} I_i = I_1$ ,有

$$I_1 \geq \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n |z_j|$$

而

$$I_1 = \operatorname{Re} \sum_{\operatorname{Re} z_j > 0} z_j \leq \left| \sum_{\operatorname{Re} z_j > 0} z_j \right|$$

取 $E = \{\operatorname{Re} z_j > 0 | 1 \leq j \leq n\}$ , 即证。 □

★★关于 $\frac{1}{\pi}$ 的证明, 参考[1]P<sub>92</sub>, 6.3

证明. 记 $z_k = |z_k|e^{i\alpha_k}$ . 当 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 时, 设 $S(\theta) = \{k | \cos(\alpha_k - \theta) > 0\}$ . 则

$$\left| \sum_{S(\theta)} z_k \right| = \left| \sum_{S(\theta)} e^{-i\theta} z_k \right| \geq \operatorname{Re} \sum_{S(\theta)} e^{-i\theta} z_k = \sum_{k=1}^N |z_k| \cos^+(\alpha_k - \theta)$$

选取 $\theta_0$ , 使得上式最后一个式子达到最大值, 取 $S = S(\theta_0)$ . 则这个最大值大于等于 $[-\pi, \pi]$ 上和的平均值. 而对于每一个 $\alpha$ , 有

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^+(\alpha - \theta) d\theta = \frac{1}{\pi}$$

即为

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N |z_k|$$

□

## 1.2 复数的几何表示

1. 把复数  $z = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$  写成三角形式.

证明.

$$z = e^{\frac{1}{2}i\theta} (e^{-\frac{1}{2}i\theta} + e^{\frac{1}{2}i\theta}) = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{1}{2}i\theta} \quad \square$$

2. 问  $n$  取何值时有  $(1+i)^n = (1-i)^n$  ?

证明. 显然

$$\frac{1+i}{1-i} = i \Rightarrow n = 4k. \quad \square$$

3. 证明:

$$\sum_{k=0}^n \cos k\theta = \frac{\sin \frac{\theta}{2} + \sin (n + \frac{1}{2})\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}, \quad \sum_{k=0}^n \sin k\theta = \frac{\cos \frac{\theta}{2} - \cos (n + \frac{1}{2})\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}.$$

证明. 二式乘  $i$  加一式有

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin \frac{\theta}{2}} e^{i\frac{n}{2}\theta}$$

两边分别取  $\text{Re}$  和  $\text{Im}$  即可。  $\square$

4. 证明:  $\triangle z_1 z_2 z_3$  和  $\triangle w_1 w_2 w_3$  同向相似的充分必要条件为

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

证明. 等价于

$$\exists a, b, s, t \text{ s.t. } \omega_k = az_k + b$$

则这三个线性相关即证明。  $\square$

5. 设  $z_1 \neq z_2$ , 证明:

(i)  $z$  位于以  $z_1$  和  $z_2$  为端点的开线段上, 当且仅当存在  $\lambda \in (0, 1)$ , 使得

$$z = \lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2;$$

(ii)  $z$  位于以  $z_1$  和  $z_2$  为端点的开圆弧上, 当且仅当存在  $\theta$  ( $0 < |\theta| < \pi$ ), 使得

$$\arg \frac{z - z_1}{z - z_2} = \theta.$$

证明. (i):利用

$$k(z_2 - z) = z - z_1 \quad \lambda := \frac{k}{1+k} \Leftrightarrow z = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2$$

(ii):作 $z$ 的直径对点记为 $\omega$ , 显然有

$$\angle z_1 \omega z_2 = \pi - \angle z_1 z z_2$$

而

$$\arg \frac{z - z_1}{z - z_2} = \angle z_1 z z_2 = \pi - \angle z_1 \omega z_2 := \theta \in (0, \pi)$$

反之显然等价于 $z$ 位于以 $z_1$ 和 $z_2$ 为端点的开圆弧上, 即证。  $\square$

6.证明: 三点 $z_1, z_2, z_3$ 共线的充要条件为

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

证明. 利用第4题结论, 反之有

$$\begin{vmatrix} z_1 - z_3 & \overline{z_1 - z_3} \\ z_2 - z_3 & \overline{z_2 - z_3} \end{vmatrix} = 0.$$

即证。  $\square$

7.图1.1是三个边长为1的正方形, 证明: 1928

$$\angle AOD + \angle BOD + \angle COD = \frac{\pi}{2}.$$

证明. 直接以 $O$ 点为原点. $OD$ 为 $x$ 轴建立平面直角坐标系, 并假设所有正方形的边长为1, 且设 $OA, OB, OC$ 分别对应 $z_1, z_2, z_3$ , 直接验证

$$\angle AOD + \angle BOD + \angle COD = \arg(z_1 z_2 z_3) = \arg(10i) = \frac{\pi}{2}$$

即证明。  $\square$

8. 图 1.2 中,  $ABED, ACFG$ 是正方形,  $AH \perp BC, M$ 是 $DG$ 的中点. 证明:  $M, A, H$ 三点共线.

证明. 记 $A$ 为原点,  $\overrightarrow{AC} = b$ , 则 $\overrightarrow{AG} = ib$ , 同理 $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AD} = \frac{a}{i} = -ia$  我们有 $H = \frac{a+b}{2}$ , 而 $M$ 所在直线为 $i(a+b)$ , 显然有 $a+b$ 与 $i(a+b)$ 正交, 证完。  $\square$

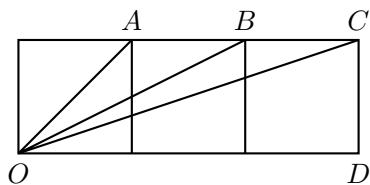


图 1.1

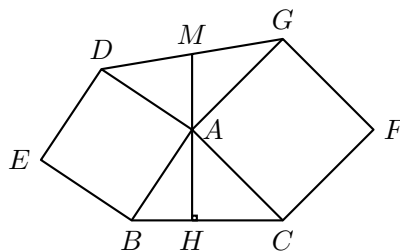


图 1.2

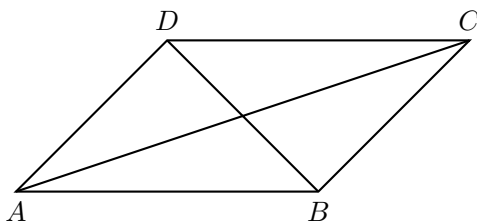


图 1.3

9. 在平行四边形  $ABCD$  中 (见图 1.3), 如果

$$\overline{AC}^2 \cdot \overline{BD}^2 = \overline{AB}^4 + \overline{AD}^4,$$

那么这个平行四边形的锐角等于  $\frac{\pi}{4}$ .

证明. 以  $A$  为原点,  $AB$  为  $x$  正半轴, 垂直  $AB$  作  $y$  轴. 记  $\overrightarrow{AB} = z_1, \overrightarrow{AD} = z_2$  则有

$$|z_1^2 - z_2^2|^2 = z_1^4 + z_2^4$$

即

$$2 \operatorname{Re} \overline{z_1}^2 z_2^2 = 0$$

记  $\angle DAB = \theta, |AB| = a, |AD| = b, AD = be^{i\theta}$ , 代入上式有

$$\cos 2\theta = 0$$

即锐角必为  $\frac{\pi}{4}$ , 即证。 □

10. 证明:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2),$$

并说明等式的几何意义.

证明. 利用  $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 - 2\operatorname{Re} \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2$ , 代入即可. 而几何意义由平行四边形可得.  $\square$

11. 设  $z_1, \dots, z_n$  是单位圆周 (以原点为中心、半径为1的圆周) 上的  $n$  个点, 如果  $z_1, \dots, z_n$  是正  $n$  边形的  $n$  个顶点, 证明:

$$z_1 + \dots + z_n = 0.$$

证明. 记  $\theta = \frac{2\pi}{n}$ , 取定  $z_1$ , 则

$$\sum_{k=1}^n z_k = z_1 \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = 0 \quad \square$$

12. 设  $z_1, z_2, z_3$  是单位圆周上的三个点, 证明: 这三个点是一正三角形三个顶点的充要条件为

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0.$$

证明. 必要性: 由

$$\frac{z_1}{z_2} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

变更下标即证明

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1(1 + e^{\frac{2\pi i}{3}} + e^{\frac{4\pi i}{3}}) = 0$$

充分性: 由

$$|z_1 + z_2| = |-z_3| = 1$$

平方有

$$2\operatorname{Re} \bar{z}_1 z_2 = -1$$

而  $\operatorname{Re} \bar{z}_1 z_2 = z_1 \cdot z_2 = \cos \langle z_1, z_2 \rangle$ , 即  $z_1 z_2$  夹角为  $\frac{2\pi}{3}$ , 同理其他, 即证明.  $\square$

注 1.2.1. 如果设  $z_k = x_k + iy_k$ , 我们有

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

通过这个式子看不出什么, 但是如果计算

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 z_2 &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_1 y_2 - y_1 x_2) \\ &= (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) + i \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

这就是其几何意义。

13. 设  $z_1, z_2, z_3, z_4$  是单位圆周上的四个点, 证明: 这四个点是一矩形顶点的充要条件为

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0.$$

证明. 必要性同11题;

充分性: 由  $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ , 若  $z_4 = 0$  矛盾, 则只能有形如  $z_1 + z_2 = 0$ ,

这等价于两个复数关于原点对称, 同理  $z_3 + z_4 = 0$ , 于是这四个点为矩形顶点, 证毕。 □

14. 设  $L$  是由方程

$$az\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + d = 0$$

所确定的点的轨迹, 其中  $a, d$  是实数,  $\beta$  是复数. 证明:

(i): 当  $a = 0, \beta \neq 0$  时,  $L$  是直线;

(ii): 当  $a \neq 0, |\beta|^2 - ad > 0$  时,  $L$  是一圆周. 求出该圆周的圆心和半径.

证明. (i): 由

$$\operatorname{Re} \beta \bar{z} = -\frac{d}{2}$$

由直线的定义立得.

(ii): 两端同乘  $a$ , 化简得

$$|az + \beta|^2 = |\beta|^2 - ad > 0$$

且圆心半径易知. □

15. 设  $z_1 \neq z_2, 0 < \lambda \neq 1$ , 证明由方程

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \lambda$$

所确定的点  $z$  的轨迹是一圆周 (通常称为 **Apollonius 圆**), 该圆周的圆心  $a$  和半径  $R$  分别为

$$a = \frac{z_1 - \lambda^2 z_2}{1 - \lambda^2}, \quad R = \frac{\lambda |z_1 - z_2|}{|1 - \lambda^2|}.$$

并问  $\lambda = 1$  时它的轨迹是什么?

证明. 利用1.1节的第四题

$$|z - z_1 - \lambda^2(z - z_2)| = \lambda |z_1 - z_2|$$

而  $LHS = |(1 - \lambda^2)z - (z_1 - \lambda^2 z_2)| = \lambda |z_1 - z_2|$

这等价于

$$\left| z - \frac{z_1 - \lambda^2 z_2}{1 - \lambda^2} \right| = \frac{\lambda |z_1 - z_2|}{|1 - \lambda^2|}. \quad \square$$

16. 如果  $z_1, \dots, z_n$  都位于过原点的直线的一侧, 证明  $\frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_n}$  也必位于该直线的某一侧, 且满足<sup>2</sup>.

$$z_1 + \dots + z_n \neq 0, \quad \frac{1}{z_1} + \dots + \frac{1}{z_n} \neq 0$$

证明. 见注。但是我们可以改进题目为在某一条直线一侧。设直线的与  $x$  轴的夹角为  $\theta$ , 于是我们有

$$\arg z_i \in (-\pi + \theta, \theta)$$

则

$$\arg \frac{1}{z_i} \in (-\theta, \pi - \theta)$$

利用14题, 过原点的直线为

$$\bar{\beta}z + \beta\bar{z} = 0$$

由条件我们有

$$\bar{\beta}z_i + \beta\bar{z}_i \neq 0$$

不妨设大于0, 全部相加得

$$\bar{\beta} \sum_{i=1}^n z_i + \beta \sum_{i=1}^n \bar{z}_i > 0$$

显然

$$\sum_{i=1}^n z_i \neq 0$$

对于  $\frac{1}{z_i}$ , 利用已证全在某一条直线一侧, 类似的考虑即可。□

注 1.2.2. 读者可由证明步骤自行寻找反例存在的原因。

17. 设  $z_1, \dots, z_n$  是一个凸  $n$  边形的  $n$  个顶点, 如果  $a$  满足关系

$$\frac{1}{z_1 - a} + \dots + \frac{1}{z_n - a} = 0,$$

那么  $a$  必在这个凸  $n$  边形的内部。

证明. 我们定义多项式  $P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$  则有

$$\frac{-P'(a)}{P(a)} = \frac{1}{z_1 - a} + \dots + \frac{1}{z_n - a}$$

<sup>2</sup> 本题题目有误, 反例可取  $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}, z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ , 直线取为  $y = x$ , 那么  $z_1, z_2$  都在此直线上方, 但  $\frac{1}{z_1}$  在此直线的下方,  $\frac{1}{z_2}$  在此直线的上方。

(i):若  $a$  在凸多边形外部, 存在一条直线将  $a$  与多边形严格分离. 所有顶点  $z_i$  位于该直线的一侧, 而  $a$  位于另一侧. 可取这条直线为  $z_1$  和  $z_2$  的连线, 记此时  $a$  位于  $H_1$  区域内(一般的定义  $H_n$  区域), 我们来证明  $P'(z)$  的零点不属于  $H_i$ . 取  $B$  为此直线的法向量, 由向量积的定义可知有

$$\operatorname{Re} \overline{Bz_i - a} > 0.$$

因此,

$$\operatorname{Re} \frac{B}{z_i - a} = \operatorname{Re} \frac{B \overline{z_i - a}}{|z_i - a|^2} > 0$$

即  $P'(z)$  在  $H_i$  上没有零点, 否则与和式为零矛盾.

(ii):若  $a$  在边界上, 由于多边形为凸集, 存在某个顶点  $z_k$  使得  $a$  位于  $z_k$  的邻域内. 此时  $z_k - a$  趋近于零, 导致  $\frac{1}{z_k - a}$  的模趋于无穷大, 而其他项有限, 即和式无法为零.  $\square$

注 1.2.3. 另解(参照[2] $P_{23}$ ), 或者利用上一题的结论, 详细步骤留作习题.

18.证明:

$$\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

提示: 考虑方程式  $(z+1)^n = 1$  的  $n-1$  个不为零的根的乘积.

证明. ([3] $P_{330}$ )考察

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left( z - \cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)$$

令  $z \rightarrow 1$ , 则

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} \left( 1 - \cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)$$

取模有

$$n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$$

即证明.

或者考虑

$$(z+1)^n - 1 = z \prod_{k=1}^{n-1} (z - z_k)$$

比较两边常数项并用Vieta定理,有

$$(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} z_k = n$$

而  $z_k = e^{\frac{2\pi i k}{n}} - 1 = e^{\frac{\pi i k}{n}} 2i \sin(\frac{\pi k}{n})$ , 即证明.  $\square$

19. 设  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ,  $P_m(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{2m+1}{2k+1} x^{m-k}$ . 证明:

$$\sin(2m+1)\theta = \sin^{2m+1} \theta P_m(\cot^2 \theta).$$

证明. 考虑

$$(e^{i\theta})^{2m+1} = e^{i(2m+1)\theta}$$

展开取其虚部

$$\sin(2m+1)\theta = \operatorname{Im} \left[ \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} (i \sin \theta)^k (\cos \theta)^{2m+1-k} \right]$$

仅当  $k$  为奇数时虚部非零. 令  $k = 2j + 1$ , 得

$$\sin(2m+1)\theta = \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{2m+1}{2j+1} \sin^{2j+1} \theta \cos^{2m-2j} \theta$$

提取  $\sin \theta$  整理得

$$\sin(2m+1)\theta = \sin^{2m+1} \theta \cdot \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{2m+1}{2j+1} \cot^{2(m-j)} \theta = \sin^{2m+1} \theta P_m(\cot^2 \theta)$$

即证. □

20. 利用上题结果证明:

$$\sum_{k=1}^m \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3}; \prod_{k=1}^m \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{1}{2m+1}$$

证明. (i): 当  $\theta = \frac{k\pi}{2m+1}$  时,  $\sin(2m+1)\theta = 0$  且  $\sin \theta \neq 0$ , 故  $P_m(\cot^2 \theta) = 0$ . 则  $\cot^2 \frac{k\pi}{2m+1}$  为多项式  $P_m(x)$  的根. 展开有

$$P_m(x) = (2m+1)x^m - \binom{2m+1}{3}x^{m-1} + \cdots + (-1)^m$$

根据Vieta定理, 根的和为

$$\sum_{k=1}^m \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{\binom{2m+1}{3}}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3}$$

(ii): 多项式  $P_m(x)$  的常数项为  $(-1)^m$ , 首项系数为  $2m+1$ . 根据Vieta定理, 根的乘积为

$$\prod_{k=1}^m \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{(-1)^m \cdot (-1)^m}{2m+1} = \frac{1}{2m+1}$$

即证. □

### 1.3 扩充平面和复数的球面表示

1. 证明: 在复数的球面表示下,  $z$  和  $\frac{1}{\bar{z}}$  的球面像关于复平面对称.

证明. 由

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2} \quad x_2 = \frac{z - \bar{z}}{i(1 + |z|^2)} \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

代入  $z$  和  $\frac{1}{\bar{z}}$  即证明关于复平面对称. □

2. 证明: 在复数的球面表示下,  $z$  和  $w$  的球面像是直径对点当且仅当  $z\bar{w} = -1$ .

证明. 充分性, 利用

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}, w = \frac{\tilde{x}_1 + i\tilde{x}_2}{1 - \tilde{x}_3}$$

代入即证明为直径对点.

必要性: 设

$$x_1 + \tilde{x}_1 = 0, x_2 + \tilde{x}_2 = 0, x_3 + \tilde{x}_3 = 0$$

代入即证. □

3. 证明: 在复数的球面表示下,  $\mathbb{C}_\infty$  中的点  $z$  和  $w$  的球面像间的距离为

$$\frac{2|z - w|}{\sqrt{(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)}}.$$

证明. 利用第一题中的表示代入即可. □

4. 证明: 在复数的球面表示下, 若  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  是二阶酉方阵, 则  $\mathbb{C}_\infty$  的变换  $w = \frac{az + b}{cz + d}$  诱导了球面绕球心的一个旋转.

证明. 利用第3题, 酉方阵的行列式为1, 以及

$$|az + b|^2 + |cz + d|^2 = \begin{pmatrix} \bar{z} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = |z|^2 + 1$$

不难验证有

$$d(z, w) = d\left(\frac{az + b}{cz + d}, \frac{aw + b}{cw + d}\right)$$

即为等距变换, 而其行列式为  $\pm 1$ , 即诱导了旋转变换. □

5. 证明：在复数的球面表示下，球面上的圆周对应于复平面上的圆周或直线，反之亦然.

证明. ([4] $P_{12}, P_{13}$ )对于球面上的圆周有表示

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

化简得

$$(\alpha_3 - \alpha)z\bar{z} + (\alpha_1 - i\alpha_2)z + (\alpha_1 + i\alpha_2)\bar{z} + (-\alpha_3 - \alpha) = 0$$

取 $A = \alpha_3 - \alpha, C = -\alpha_3 - \alpha$ 为实数,  $B = \alpha_1 + i\alpha_2$ 为复数, 且 $|B|^2 - AC = 1 - \alpha^2 \geq 0$ , 当 $\alpha = 0$ 时, 为 $S$ 中圆周且 $A + C = 0$ . 又若 $S$ 上的圆周过 $N$ 点, 即 $\alpha_3 = \alpha$ , 这时它的球极射影为直线.

反之,  $\mathbb{C}$ 上的圆周 $Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$

$$A \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} + \bar{B} \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} + B \frac{x_1 - ix_2}{1 - x_3} + C = 0$$

化简得

$$(B + \bar{B})x_1 + i(\bar{B} - B)x_2 + (A - C)x_3 = -(A + C).$$

令 $\alpha_1 = B + \bar{B}, \alpha_2 = i(\bar{B} - B), \alpha_3 = A - C, \alpha = -(A + C)$ . 且

$$\alpha \leq \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$$

把 $\alpha_i$ 单位化, 即平面与 $S$ 相交, 交线为圆周. 若 $A + C = 0$ , 则 $\alpha = 0$ , 则为球极射影. 若 $A = 0$ , 则 $\alpha_3 = \alpha$ , 即证.  $\square$

6. 证明：在复数的球面表示下, 复平面上两条光滑曲线在交点处的夹角与它们的球面像在交点处的夹角相等.

证明. 球极投影将复平面上的点 $z = x + iy$ 映射到单位球面 $S^2$ 上的点 $(X, Y, Z)$ , 其公式为:

$$X = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad Y = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad Z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

对映射

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \rightarrow \Gamma(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$$

其Jacobi矩阵为:

$$J = \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} \frac{2(y^2 + 1 - x^2)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} & \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \\ \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} & \frac{2(x^2 + 1 - y^2)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \\ \frac{4x}{(x^2 + y^2 + 1)^2} & \frac{4y}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \end{bmatrix}$$

而

$$J^T J = \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

两条曲线夹角公式参见[5]P<sub>211</sub>21.1.3。设复平面上的两曲线在一点处的切向量为 $\vec{v}$ 和 $\vec{w}$ ，映射到球面后的切向量为 $J\vec{v}$ 和 $J\vec{w}$ 。则

$$\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} = \frac{(J\vec{v}) \cdot (J\vec{w})}{\|J\vec{v}\| \|J\vec{w}\|} = \cos \phi.$$

故夹角不变。 □

注 1.3.1. 另解:类似于[5]P<sub>238</sub>第7,8题.

## 1.4 复数列的极限

1. 设  $z_0 \notin (-\infty, 0]$ ,  $z_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . 证明: 复数列  $\{z_n\}$  收敛到  $z_0$  的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |z_0|, \lim_{n \rightarrow \infty} \arg z_n = \arg z_0.$$

证明. 必要性 ( $\Rightarrow$ ) 由于模函数  $|\cdot|$  是连续的, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |z_0|.$$

而因  $z_0 \notin (-\infty, 0]$ , 存在邻域  $U$  使得  $U$  内不含负实轴. 当  $n$  足够大时,  $z_n \in U$ , 此时主辐角  $\arg z_n$  在  $(-\pi, \pi)$  内连续且唯一确定. 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arg z_n = \arg z_0.$$

充分性 ( $\Leftarrow$ ) 有

$$z_n = |z_n|e^{i \arg z_n}, \quad z_0 = |z_0|e^{i \arg z_0}.$$

由于指数函数  $e^{i\theta}$  在  $\theta$  连续时连续, 且模和辐角均收敛, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n|e^{i \arg z_n} = |z_0|e^{i \arg z_0} = z_0.$$

即证. □

2. 设  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x (\cos y + i \sin y).$$

证明. 令  $z_0 = (1 + \frac{x+iy}{n})^n$ , 记  $\theta = \frac{y}{n+x}$  则有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(1 + \frac{x+iy}{n}\right)^n \right| &= \left( \left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2 \right)^{\frac{n}{2}} \\ &= e^x \end{aligned}$$

其中我们利用了

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{y}{n}\right)^2 < \varepsilon, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n\theta = y$$

分别取  $\operatorname{Re} |z_0|e^{in\theta}$  和  $\operatorname{Im} |z_0|e^{in\theta}$ , 即证. □

3. 证明: 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n} = z_0.$$

证明. 设

$$z_k = x_k + iy_k \quad x_k, y_k \in \mathbb{R}$$

代入利用实数中Stolz定理即证. □

4. 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0, \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w_0$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k w_{n-k} = z_0 w_0.$$

证明. 不妨设  $z_0 = w_0 = 0$ . 否则我们作  $z_k = z_0 + a_k, w_{n-k} = w_0 + b_{n-k}$  换元, 其中  $a_k \rightarrow 0$  和  $b_{n-k} \rightarrow 0$ . 于是

$$z_k w_{n-k} = (z_0 + a_k)(w_0 + b_{n-k}) = z_0 w_0 + z_0 b_{n-k} + w_0 a_k + a_k b_{n-k}.$$

显然有

$$\forall n, k \in \mathbb{Z}, |z_k|, |w_{n-k}| \leq M$$

而

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{ s.t. } n - k > N, |w_{n-k}| < \frac{\varepsilon}{M}$$

同理

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K > 0, \text{ s.t. } k > K, |z_k| < \frac{\varepsilon}{M}$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 不妨取

$$K = N = \frac{n}{2} \rightarrow \infty$$

于是

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k w_{n-k} = \frac{1}{n} \left( \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} z_k w_{n-k} + \sum_{\frac{n}{2} < k \leq n} z_k w_{n-k} \right) < \frac{1}{nM} \left( \frac{nM\varepsilon}{2} + \frac{Mn\varepsilon}{2} \right) < \varepsilon \quad \square$$

5. 设无穷三角阵

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

满足

(1) 对任意固定的  $k$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = a_k$  存在;

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{nk}$  存在;

$$(3) \sum_{k=1}^n |a_{nk}| \leq M < \infty, \forall n \in \mathbb{N}.$$

证明: 若复数列 $\{z_n\}$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{nk} z_k$ 存在.

证明. 设 $\{z_n\}$ 收敛于 $z_0$ , 即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}, \text{ s.t. } k \geq K, |z_k - z_0| < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2M}, \frac{\varepsilon}{2^k M_0} \right\}$$

将原式分解为:

$$\sum_{k=1}^n a_{nk} z_k = z_0 \sum_{k=1}^n a_{nk} + \sum_{k=1}^n a_{nk} (z_k - z_0).$$

(1)第一部分: 由条件 (2), 存在 $S \in \mathbb{C}$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{nk} = S,$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_0 \sum_{k=1}^n a_{nk} = z_0 S$ .

(2)第二部分: 分为:

$$\sum_{k=1}^n a_{nk} (z_k - z_0) = \underbrace{\sum_{k=1}^{K-1} a_{nk} (z_k - z_0)}_{(i)} + \underbrace{\sum_{k=K}^n a_{nk} (z_k - z_0)}_{(ii)}.$$

(ii): 当 $k \geq K$ 时,  $|z_k - z_0| < \frac{\varepsilon}{2M}$ , 故

$$\left| \sum_{k=K}^n a_{nk} (z_k - z_0) \right| \leq \sum_{k=K}^n |a_{nk}| |z_k - z_0| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \sum_{k=K}^n |a_{nk}| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(i): 由条件(1)知当 $n \rightarrow \infty$ 时(固定住 $K$ ),

$$\sum_{k=1}^{K-1} a_{nk} (z_k - z_0) \rightarrow \sum_{k=1}^{K-1} a_k (z_k - z_0).$$

即存在 $N \in \mathbb{N}$ , 当 $n \geq N$ 时,

$$\left| \sum_{k=1}^{K-1} a_{nk} (z_k - z_0) - \sum_{k=1}^{K-1} a_k (z_k - z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

即当 $n \geq N$ 时,

$$\sum_{k=1}^n a_{nk} (z_k - z_0) < \sum_{k=1}^{K-1} a_k (z_k - z_0) + \varepsilon.$$

再令  $K \rightarrow \infty$ , 由条件(1)中极限存在可知

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \exists M_0, s.t., |a_k| \leq M_0$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{nk} z_k < z_0 S + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z_k - z_0) + \varepsilon < z_0 S + M_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k M_0} + \varepsilon = z_0 S + 2\varepsilon$$

由  $\varepsilon$  的任意性可知极限存在, 证毕。 □



## 1.5 开集,闭集和紧集

1.证明: 一个平面点集的孤立点的全体至多可列.

证明. 可取关于每一个孤立点的邻域

$$A_i = \{(\alpha_{i1}, \beta_{i1}) \times (\alpha_{i2}, \beta_{i2})\}$$

使得  $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ , 且有一一对应

$$x_i \in A_i, x_j \notin A_i (i \neq j)$$

因为若不成立, 每一个  $x_i$  的邻域会有无穷多点, 与孤立点矛盾. 而邻域内有有限点时适当选取  $A_i$  (作更细的划分) 可使上式成立.

显然  $\exists r_j \in (\alpha_{ij}, \beta_{ij})$ , 且  $r_j \in \mathbb{Q}$ , 由  $\mathbb{Q}^2$  至多可列即证明 (利用对角线法则). □

2. 设  $E \subset \mathbb{C}$  是非空点集,  $z, w \in \mathbb{C}$ . 证明:

$$|d(z, E) - d(w, E)| \leq |z - w|$$

成立, 而

$$|d(z, E) - d(w, E)| \leq d(z - w, E)$$

不成立.

证明.  $\forall \xi \in E$ , 有

$$d(z, E) = \inf_{\xi \in E} |\xi - z| \leq |z - \xi| \leq |z - w| + |w - \xi|$$

两边对  $w$  取  $\inf$  即

$$d(w, E) = \inf_{\xi \in E} |w - \xi| \geq d(z, E) - |z - w|$$

即

$$d(z, E) - d(w, E) \leq |z - w|$$

对称的我们有

$$d(w, E) - d(z, E) \leq |z - w|$$

即证。

反例我们取

$$E = \{1\}, z = 2, w = 1$$

即

$$d(z, E) = 1, d(z, E) = 0, d(z - w, E) = 0$$

与结论矛盾!

□

3. 指出下列点集的内部、边界、闭包和导集:

- (i)  $\mathbb{N} = \{k : k \text{ 为自然数}\}$ ; (ii)  $E = \{\frac{1}{k} : k \text{ 为自然数}\}$ ; (iii)  $D = B(1, 1) \cup B(-1, 1)$ ;  
(iv)  $G = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| \leq 2\}$ ; (v)  $\mathbb{C}$ .

证明. 如下表

□

| 题号    | 内部                      | 边界                             | 闭包                                   | 导集                                   |
|-------|-------------------------|--------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| (i)   | $\emptyset$             | $\mathbb{N}$                   | $\mathbb{N}$                         | $\emptyset$                          |
| (ii)  | $\emptyset$             | $E \cup \{0\}$                 | $E \cup \{0\}$                       | $\{0\}$                              |
| (iii) | $B(1, 1) \cup B(-1, 1)$ | $ z - 1  = 1 \cup  z + 1  = 1$ | $ z - 1  \leq 1 \cup  z + 1  \leq 1$ | $ z - 1  \leq 1 \cup  z + 1  \leq 1$ |
| (iv)  | $1 <  z  < 2$           | $ z  = 2 \cup  z  = 1$         | $1 \leq  z  \leq 2$                  | $1 \leq  z  \leq 2$                  |
| (v)   | $\mathbb{C}$            | $\mathbb{C}$                   | $\mathbb{C}$                         | $\mathbb{C}$                         |

4. 指出下列点集中哪些是开集, 哪些是闭集, 哪些是紧集:

- (i)  $\mathbb{Z} = \{k : k \text{ 为整数}\}$ ; (ii)  $E$  为有限集; (iii)  $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \left(\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} F_k\right)$ , 其中,  
 $F_k = \{z \in \mathbb{C} : z = k + iy, 0 \leq y \leq 1\}$ ; (iv)  $G = B(0, 1) \setminus \left\{\frac{1}{k+1} : k \text{ 为自然数}\right\}$ ; (v)  $\mathbb{C} \setminus B(\infty, R)$ .

证明. (i) 非紧闭集, (ii) 紧集, (iii) 开集, (iv) 非开闭紧集, (v) 紧集。

□

5. 证明: 若  $D$  为开集, 则  $D' = \overline{D} = \partial D \cup D$ .

证明. 利用定义

$$\overline{D} = D' \cup D = D' \Leftrightarrow D \subset D' \Leftrightarrow D^c \supset (D')^c = (D^c)'$$

其中

$$x \in (D')^c \Leftrightarrow \exists \delta > 0, (B(x, \delta) \setminus \{x\}) \cap D = \emptyset$$

$$x \in (D^c)' \Leftrightarrow \forall \delta > 0, (B(x, \delta) \setminus \{x\}) \cap D^c \neq \emptyset$$

利用闭集性质  $F' \subset F$  即可。或者

$$x \in D \Leftrightarrow \exists r > 0, B(x, r) \subset D \Leftrightarrow \exists \delta > 0, (B(x, \delta) \setminus \{x\}) \cap D^c = \emptyset \Rightarrow x \in D'$$

而

$$x \in \partial D \Leftrightarrow \forall r > 0, B(x, r) \cap D \neq \emptyset, B(x, r) \cap D^c \neq \emptyset$$

$$x \in D' \Rightarrow \forall r > 0, (B(x, r) \setminus \{x\}) \cap D \neq \emptyset$$

即  $D' \subset \partial D \cup D$ . 反之如果  $x \in D$ , 利用开集定义即  $x \in D'$ . 如果  $x \in D^c \cap \partial D$ , 显然有

$$\forall r > 0, (B(x, r) \setminus \{x\}) \cap D \neq \emptyset \Rightarrow x \in D'$$

即证。 □

6. 设  $\Lambda$  是指标集,  $\{D_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  是开集族,  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  是闭集族. 证明:  $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} D_\alpha$  是开集,  $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha$  是闭集.

证明. 验证开集和闭集的定义即可。

$$x \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} D_\alpha \Leftrightarrow \exists \alpha_0 \in \Lambda, x \in D_{\alpha_0} \Leftrightarrow \exists r_0, B(x, r_0) \subset D_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} D_\alpha$$

对于闭集, 利用 **De Morgan** 律我们有

$$\left( \bigcup_{\alpha \in \Lambda} D_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} D_\alpha^c$$

由上证明过程, 显然  $LHS$  为闭集。只需取

$$D_\alpha^c = F_\alpha$$

即证明! □

7. 证明: 有限个开集的交是开集, 有限个闭集的并是闭集.

证明. 对于一式, 设  $O_i$  为一簇开集, 则

$$x \in \bigcap_{i=1}^n O_i \Leftrightarrow \forall i, x \in O_i$$

对于每一个  $O_i$ , 由开集的定义。我们能找到  $B(x, r_i) \subset O_i$ 。而有限下可以取定  $r_{\min} = \min_{1 \leq i \leq n} r_i$ 。于是有

$$B(x, r_{\min}) \subset \bigcap_{i=1}^n O_i$$

而由 **De Morgan** 律我们有

$$\left( \bigcap_{i=1}^n O_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^n O_i^c$$

显然由一式,  $LHS$  为闭集, 且每一个  $O_i^c$  为闭集, 证完。 □

8. 设  $D$  是开集,  $F \subset D$  是非空紧集. 证明:  $d(F, \partial D) > 0$ ; 对任意  $0 < \delta < d(F, \partial D)$ , 存在  $F$  中的点  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , 使得  $F \subset \bigcup_{k=1}^n B(z_k, \delta) \subset D$ , 并且

$$d\left(\bigcup_{k=1}^n B(z_k, \delta), \partial D\right) \geq d(F, \partial D) - \delta.$$

证明. (i) 利用定理 1.5.6 即证明。

(ii)  $\forall \zeta \in B(z_k, \delta)$ , 有

$$d(F, \partial D) - d(\zeta, \partial D) \leq d(z_k, \partial D) - d(\zeta, \partial D) \leq |z_k - \zeta| < \delta$$

则

$$d(F, \partial D) < d(\zeta, \partial D) + \delta$$

即

$$d\left(\bigcup_{k=1}^n B(z_k, \delta), \partial D\right) = \inf d(\zeta, \partial D) \geq d(F, \partial D) - \delta \quad \square$$

9. 证明: 若  $E$  是闭集,  $F$  是紧集, 则存在  $z_0 \in E, w_0 \in F$ , 使得  $d(E, F) = |z_0 - w_0|$ . 将  $F$  换成闭集后是否还存在这样的  $z_0$  和  $w_0$ ?

证明. 参考([6]  $P_{85}, P_{86}$ ) (1) 由定义,  $\exists \{z_n\} \subset E, \{w_n\} \subset F$ , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - w_n| = d(E, F).$$

由于  $F$  是紧集(有界),  $\{w_n\}$  存在收敛子列  $\{w_{n_k}\}$  满足  $w_{n_k} \rightarrow w_0 \in F$  ( $F$  为闭集)。因  $|z_{n_k} - w_{n_k}| \rightarrow d(E, F)$ , 则  $\{z_{n_k}\}$  有界。由 **Bolzano-Weierstrass 定理**,  $\{z_{n_k}\}$  存在收敛子列  $\{z_{n_{k_j}}\}$  满足  $z_{n_{k_j}} \rightarrow z_0 \in E$  ( $E$  为闭集)。因此,

$$|z_0 - w_0| = \lim_{j \rightarrow \infty} |z_{n_{k_j}} - w_{n_{k_j}}| = d(E, F)$$

即证。

(2) 取  $E = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ,  $F = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x > 0\}$ 。则

$$d(E, F) = 0$$

但  $E \cap F = \emptyset$ , 即不存在  $z_0 = w_0 \in E \cap F$ . □

10. 证明: 若  $E \subset \mathbb{C}$  既是开集, 又是闭集, 则  $E$  是空集或  $E = \mathbb{C}$ .

证明. 反证存在非空真子集  $E \subset \mathbb{C}$ , 且  $E$  既是开集又是闭集。则:  $E \neq \emptyset$  且  $E \neq \mathbb{C}$ , 且补集  $\mathbb{C} \setminus E$  也既是开集又是闭集。此时,  $\mathbb{C}$  可分解为两个非空、不相交闭开集的并:

$$\mathbb{C} = E \cup (\mathbb{C} \setminus E), \quad E \neq \emptyset, \quad \mathbb{C} \setminus E \neq \emptyset.$$

这与  $\mathbb{C}$  的连通性矛盾, 则  $E = \emptyset$  或  $\mathbb{C}$ 。 □

注 1.5.1.  $\mathbb{C}$  是连通的, 因为:

1. 路径连通: 对任意两点  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , 存在连续路径  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  连接它们(例如直线段  $\gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$ )。
2. 路径连通蕴含连通: 路径连通的空间为连通空间。



## 1.6 曲线和域

1. 满足下列条件的点 $z$ 所组成的点集是什么?如果是域,说明它是单连通域还是多连通域?

- (i)  $\operatorname{Re} z = 1$ ; (ii)  $\operatorname{Im} z < -5$ ; (iii)  $|z - i| + |z + i| = 5$ ; (iv)  $|z - i| \leq |2 + i|$ ;  
 (v)  $\arg(z - 1) = \frac{\pi}{6}$ ; (vi)  $|z| < 1, \operatorname{Im} z > \frac{1}{2}$ ; (vii)  $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 2$ ; (viii)  $0 < \arg \frac{z-i}{z+i} < \frac{\pi}{4}$ .

证明. (i) 一条直线, 不是域. (ii) 平面, 单连通域. (iii) 形如椭圆的区域但不是域  
 (iv) 一个闭圆盘, 单连通域 (v) 设 $z = x + iy \Leftrightarrow \arctan \frac{y}{x-1} = \frac{\pi}{6}$ , 即为一条半射线, 不为域。  
 (vi) 形如弓形区域, 单连通域 (vii) 圆盘外的无界闭区域 (viii) 设 $z = x + iy$ 展开有理化得

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{|z|^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2} + i \frac{-2x}{x^2 + (y+1)^2}$$

分析有此复数在第一象限且虚部与实部比值小于1, 我们依次得到不等式 $|z|^2 - 1 > 0, x < 0, \frac{-2x}{|z|^2 - 1} < 0$  即

$$\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z < 0 \cup |z + 1| > \sqrt{2}\}$$

则为以 $(-1, 0)$ 为圆心, 以 $\sqrt{2}$ 为半径的圆且在左半平面的外部, 为单连通域。□

2. 证明: 非空点集 $E \subset \mathbb{R}$ 为连通集, 当且仅当 $E$ 是一个区间。

证明. 由定理1.6.3, 反证不为区间时候不可以用直线连接。而区间显然连通, 即证  
 另解([7]P<sub>180</sub>): 若 $S$ 为 $\mathbb{R}$ 子集, 且不为区间, 则 $\exists x < z < y, s.t. x, y \in S, z \notin S$ , 我们有

$$S = (S \cap (-\infty, z)) \cup (S \cap (z, +\infty))$$

即 $S$ 不连通。下证 $I \subset \mathbb{R}$ 为连通的。反证不连通, 则 $\exists U, V \subset \mathbb{R}, s.t. (U, V \text{ 开})$

$$U \cap I \neq \emptyset, V \cap I \neq \emptyset, I \subset U \cup V$$

假设 $\exists a < b, s.t. a \in U \cap I, b \in V \cap I$ 。令

$$A = \{x \in U \cap I | x < b\}$$

则 $A$ 不空, 记 $c = \sup A$ 。则由 $U$ 为开集可知 $c \neq a$ , 即 $a < c \leq b$ 。但是我们有

1.  $c \notin U$ : 如果成立, 则 $\exists \varepsilon > 0, s.t. b > c + \varepsilon \in U$ , 而 $I$ 为区间, 且 $c < c + \varepsilon < b$ , 则 $c + \varepsilon \in I \cap U$ , 与 $c = \sup A$ 矛盾。
2.  $c \notin V$ : 如果成立, 则 $\exists \varepsilon > 0, s.t. (c - \varepsilon, c] \subset V$ 。而 $c > a$ , 所以可以取 $\varepsilon$ 任意小使得 $(c - \varepsilon, c] \subset I$ , 与 $c = \sup A$ 矛盾。

综上所述有  $c \notin U \cup V$ , 从而  $c \notin I$ , 矛盾! 即证明。  $\square$

注 1.6.1. 再另解参考 [2]  $P_{43}, P_{44}$

再再另解参考 [8]  $P_{333}$  定理 8.5.2

3. 设  $E$  是非空点集,  $A$  是  $E$  的非空子集. 若  $A$  是连通的, 并且不存在  $E$  的连通子集真包含  $A$ , 则称  $A$  是  $E$  的**连通分支**. 证明: 开集的连通分支仍然是开集, 闭集的连通分支仍然是闭集.

证明. (i): 设  $E$  为开集,  $A \subseteq E$  为  $E$  的连通分支. 对任意  $x \in A$ , 因  $E$  是开集, 存在开球  $B(x, r) \subseteq E$ . 而  $A$  是连通分支, 断言此时必有  $B(x, r) \subseteq A$ , 否则

$$B(x, r) \cap A^c \neq \emptyset$$

取  $A \cup B(x, r) \supset A$  是更大的连通集, 矛盾. 故  $A$  是开集.

(ii): 设  $E$  为闭集,  $A \subseteq E$  为  $E$  的连通分支. 而  $\bar{A}$  在  $E$  中必为连通. 若  $\bar{A} \supset A$ , 则  $\bar{A}$  是更大的连通集, 矛盾. 故  $\bar{A} \subset A$ , 即  $A$  是闭集。  $\square$

4. 设  $E$  是非空点集,  $\varepsilon > 0$ . 若对于  $E$  中的任意两点  $a, b$ , 存在  $E$  中有限点  $a = z_0, z_1, \dots, z_n = b$ , 使得  $|z_k - z_{k-1}| < \varepsilon$  成立 ( $1 \leq k \leq n$ ), 则称  $E$  为  $\varepsilon$ -**连通**的. 证明: 紧集连通的充要条件是, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 它都是  $\varepsilon$ -连通的. 并举例说明将紧集改为闭集后结论不再成立.

证明.  $\Rightarrow$ : 设  $K$  为紧连通集. 可取开覆盖  $\{B(x, \frac{\varepsilon}{2})\}_{x \in K}$  并从中取有限子覆盖  $\{B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})\}_{i=1}^n$ . 对任意  $a, b \in K$ , 依次覆盖中心构造链: 从  $a$  出发, 依次经过覆盖中心  $x_j$ , 每一步  $|x_j - x_{j+1}| < \varepsilon$ , 最终到  $b$ .

$\Leftarrow$ : 若  $K$  不连通, 则存在非空闭集  $A, B \subseteq K$ ,  $A \cup B = K$  且  $A \cap B = \emptyset$ . 取  $\varepsilon = \frac{1}{2}d(A, B) > 0$ , 则  $A$  与  $B$  间无法用  $\varepsilon$  步连接, 矛盾。

反例  $E = \{(x, 0) \mid x \geq 1\} \cup \{(x, \frac{1}{x}) \mid x \geq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ .

容易验证  $E$  为闭集且不连通(分为两个不相交闭集). 但是  $E$  是  $\varepsilon$  连通。(取足够大  $x$  使得  $\frac{1}{x} < \varepsilon$ )

相关知识可以参考 [2]  $P_{48}$   $\square$

5. 证明: 若  $D$  是有界单连通域, 则  $\partial D$  连通. 举例说明, 若  $D$  是无界单连通域, 则  $\partial D$  可能不连通.

证明. (i): 利用定义, 等价于  $D$  中任意简单闭曲线可以收缩到一点, 而  $D$  有界, 不断扩张简单闭曲线到  $\partial D$  即可. 详细证明可以用反证导出矛盾。

(ii): 取高中常见的双曲线即可。  $\square$

## 1.7 复变函数的极限和连续性

1.证明: 若 $E$ 是紧集,  $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ 连续, 则 $f$ 在 $E$ 上一致连续.

证明. 参考[2] $P_{51}$ .  $f$ 为连续映射, 则对

$$\forall z \in E, \exists B(z, \rho), s.t. \forall z' \in B(z, \rho_n), d(f(z), f(z')) < \frac{\varepsilon}{2}$$

而 $E$ 为紧集, 则可从中取出有限开覆盖球。于是

$$\exists \delta = \min_{1 \leq k \leq m} \rho_k$$

当 $d(x_1, x_2) < \delta$ 时, 因为有限覆盖性质, 必定

$$\exists y_k, s.t. d(x_1, y_k) < \rho_k$$

此时我们有( $\delta_k = 2\rho_k$ )

$$d(x_2, y_k) \leq d(x_2, x_1) + d(x_1, y_k) = \rho_k + \delta \leq \delta_k$$

于是

$$d(f(x_1), f(y_k)) < \frac{\varepsilon}{2}, d(f(x_2), f(y_k)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

则

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq d(f(x_1), f(y_k)) + d(f(x_2), f(y_k)) < \varepsilon$$

□

2.证明: 若 $D$ 是单连通域,  $0 \notin D$ , 则必存在 $D$ 上的连续函数 $\varphi(z)$ , 使得 $\varphi(z) \in \text{Arg } z, \forall z \in D$ .  $\varphi(z)$ 称为 $\text{Arg } z$ 在 $D$ 上的一个单值连续分支.

证明. (解法一)([4] $P_{57}$ )注意到

$$\text{Log } z = \log |z| + i \text{Arg } z$$

我们只需要证明 $\text{Log } z$ 在 $0 \notin D$ 上存在单值全纯分支。

而 $\log |z|$ 在 $D$ 内调和(在 $D \setminus \{0\}$ 上满足Laplace方程) 注意到 $D$ 单连通, 则必定存在其共轭调和函数 $v(z)$ , 使 $\log |z| + iv(z)$ 在 $D$ 内全纯, 取实数 $\alpha$ , 使 $z_0 \in D$ , 且 $v(z_0) + \alpha = \arg z_0$ , 令

$$f(z) = \log |z| + i(v(z) + \alpha)$$

则 $f(z)$ 全纯, 且

$$z \equiv e^{f(z)}, \forall z \in D$$

(利用 $|e^{f(z)}| = |z| \Leftrightarrow z, f(z)$ 至多相差一个常数因子, 且 $z_0$ 处取等。)

由定义 $f(z)$ 为 $\text{Log } z$ 在 $D$ 中的单值全纯分支, 即证。

(解法二)(Deepseek)设单连通域  $D \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 。因  $D$  单连通且不包含原点, 函数  $f(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$  在  $D$  上全纯且积分与路径无关。固定  $z_0 \in D$ , 对任意  $z \in D$ , 定义:

$$F(z) = \int_{z_0}^z \frac{1}{\zeta} d\zeta + \ln |z_0| + i\theta_0,$$

其中 $\theta_0 \in \text{Arg } z_0$ 为初始辐角。积分可表示为:

$$F(z) = \ln |z| + i\varphi(z),$$

由积分路径无关性,  $F(z)$ 是 $D$ 上的全纯函数, 且:

$$e^{F(z)} = z \Rightarrow e^{\ln |z| + i\varphi(z)} = |z|e^{i\varphi(z)} = z.$$

即 $\varphi(z) \in \text{Arg } z$ 。而 $F(z)$ 全纯, 所以实部和虚部均连续。特别地, 虚部  $\varphi(z)$ 是 $\text{Arg } z$ 的连续分支。因为若存在路径使  $\varphi(z)$ 跳跃 $2\pi$ , 则对应积分虚部会增加 $2\pi i$ , 这与 $D$ 单连通矛盾。  $\square$

3.证明: 若 $E$ 是紧集,  $f$ 在 $E$ 上连续, 则 $f(E)$ 也是紧集.将紧集换成闭集, 结论是否成立?

证明. (i)利用 $f$ 连续, 利用第一题则一致连续, 再利用有限开覆盖即可。

(ii)不一定成立, 令 $f(x) = \frac{1}{x}, E = [1, +\infty)$   $\square$

4.设 $f$ 是域 $D$ 上的连续函数, 并且对任意 $z_0 \in \partial D, \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 存在, 证明:

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D; \\ \lim_{\zeta \rightarrow z} f(\zeta), & z \in \partial D \end{cases}$$

在 $\bar{D}$ 上连续.

证明. 若 $\forall z_0 \in D$ , 由 $f$ 连续 $\Rightarrow F(z)$ 连续。

若 $\forall z_0 \in \partial D, \partial D$ 紧, 则 $F(z_0)$ 存在

$$\forall z \in D \rightarrow z_0, \exists \delta > 0, \forall \varepsilon > 0, s.t. |z_0 - z| < \delta$$

$$|\lim_{\zeta \rightarrow z} f(\zeta) - \lim_{\zeta \rightarrow z_0} f(\zeta)| = \lim_{\zeta \rightarrow z} |f(\zeta) - f(\zeta + z_0 - z)| < \varepsilon$$

即证。  $\square$

5.证明: 若 $f$ 在域 $D$ 上一致连续, 则对任意 $z_0 \in \partial D, \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 存在.

证明.  $f(z)$ 一致连续, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. \forall z_1, z_2 \in D, |z_1 - z_2| < \delta$ 时, 有 $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$  则对于 $\forall z_1, z_2 \in \partial D \cap B(z_0, \delta)$ , 有 $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ , 由Cauchy收敛原理, 即证。□

6. 研究 $f(z) = \frac{1}{1-z}$ 和 $g(z) = \frac{1}{1+z^2}$ 在 $B(0, 1)$ 上的连续性与一致连续性。

证明. 显然 $f(z), g(z)$ 连续, 可取 $z_1 = 1 - \frac{1}{n}, z_2 = 1 - \frac{2}{n}, n > \frac{1}{\delta_0}$ , 则

$$|z_1 - z_2| = \frac{1}{n} < \delta_0$$

而

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \frac{n}{2} \geq \varepsilon_0$$

令 $n \rightarrow +\infty$ , 即不一致连续。而同理取 $z_1 = i(1 - \frac{1}{n}), z_2 = i(1 - \frac{2}{n}), n > \frac{i}{\delta_1} (\delta_1 \in \mathbb{C})$ 则

$$|z_1 - z_2| = \frac{i}{n} < \delta_1$$

而

$$|g(z_1) - g(z_2)| = \left| \frac{(z_1 + z_2)(z_1 - z_2)}{(1 + z_1^2)(1 + z_2^2)} \right| = \frac{n^2}{4} \left| \frac{2n - 3}{(2n - 1)(n - 1)} \right| \geq \frac{n}{8} \geq \varepsilon_1$$

令 $n \rightarrow +\infty$ , 即不一致连续。□

7. 设连续映射 $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ 满足

$$f(z) \neq f(w), \quad \forall z, w \in E, z \neq w,$$

则称 $f$ 是 $E$ 上的一一连续映射. 证明: 若 $E$ 是紧集,  $f$ 是 $E$ 上的一一连续映射, 则 $f^{-1}: f(E) \rightarrow E$ 也是一一连续映射, 即 $f: E \rightarrow f(E)$ 是一个同胚映射. 将紧集换成闭集, 结论是否成立?

证明. (i): (解法一): 由于 $E$ 紧且 $f$ 连续, 则 $f(E)$ 紧。而 $\mathbb{C}$ 是Hausdorff空间。利用[7] $P_{71}$ 引理2.1.20, (闭映射定理)。即 $f: E \rightarrow f(E)$ 是同胚。

**定理 1.7.1 (闭映射定理).** 设拓扑空间 $X$ 为紧的,  $Y$ 为Hausdorff空间, 则任意连续映射 $f: X \rightarrow Y$ 为闭映射, 且为逆紧映射。

(解法二): 或者利用数学分析中的一个定理:

**定理 1.7.2.** 一个映射为连续映射当且仅当其开集的原像是开集, 闭集的原像是闭集。

(证明参见[8] $P_{349}$ 定理8.8.3)

利用紧集的闭子集为紧集, 任意取闭集 $F \subset E$ , 则 $F$ 紧, 于是 $f(F) \subset f(E)$ 为紧集, 当然也为闭集。再用一次结论即得 $f^{-1}: f(E) \rightarrow E$ 也是连续映射。而 $f$ 为单射, 可知 $f^{-1}$ 也为单射, 即为一一连续映射。

注 1.7.1. 类似于[8]P<sub>350</sub>的问题8.8第一题。

(ii):结论不成立. 设 $E = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ . 定义:

$$f: E \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(t) = e^{-t} e^{it}.$$

则

$$f(t_1) = f(t_2) \Leftrightarrow e^{t_2-t_1} e^{i(t_1-t_2)} = 1 \Leftrightarrow t_1 = t_2$$

考虑 $t_n = 2\pi n$ , 则:

$$f(t_n) = e^{-2\pi n} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

但 $0 \notin f(E)$ , 即 $f(E)$ 不是闭集. 对 $\delta > 0$ , 当 $|f(t_1) - f(t_2)| < \delta$ 时, 即

$$e^{-t_2} |e^{t_2-t_1} - e^{i(t_2-t_1)}| = e^{-t_2} \sqrt{(e^{t_2-t_1} - \cos(t_2-t_1))^2 + \sin^2(t_2-t_1)} < \delta$$

推不出

$$\forall \varepsilon > 0, |t_2 - t_1| < \varepsilon$$

例如可以取数列为 $t_1^{(n)} = 2\pi n, t_2^{(n)} = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$ . 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-2\pi n - \frac{\pi}{2}} \sqrt{(e^{\frac{\pi}{2}})^2 + 1} < \delta$$

但是此时对任意的 $0 < \varepsilon_0 < \frac{\pi}{2}$ , 有

$$|t_2^{(n)} - t_1^{(n)}| = \frac{\pi}{2} \geq \varepsilon_0$$

于是

$$f^{-1}: f(E) \rightarrow E$$

不是一个连续映射, 即结论不成立。 □

注 1.7.2. 参考[7]P<sub>65</sub> ~ P<sub>71</sub>有以下结论:

1. 紧集在连续映射下的原像不为紧集。
2. 拓扑空间中, 紧集, 列紧集, 极限点紧集的子集性质保持。
3. 紧集的闭子集为紧集, 但是其紧子集不一定为闭集。

8. 证明: (i) 存在连续映射将 $[0, 1]$ 映为 $\partial B(0, 1)$ ; (ii) 不存在一一连续映射将 $[0, 1]$ 映为 $\partial B(0, 1)$ .

证明. (i):

$$f(x) = e^{i2\pi x}$$

因为当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 可以取 $\varepsilon$ 使 $\delta < \frac{\varepsilon}{2\pi}$ .

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \sqrt{(\cos(2\pi x_1) - \cos(2\pi x_2))^2 + (\sin(2\pi x_1) - \sin(2\pi x_2))^2} \\ &= \sqrt{(-2\sin \pi(x_1 + x_2) \sin \pi(x_1 - x_2))^2 + (2\cos \pi(x_1 + x_2) \sin \pi(x_1 - x_2))^2} \\ &\leq 2\pi\delta \sqrt{\sin^2 \pi(x_1 + x_2) + \cos^2 \pi(x_1 + x_2)} = 2\pi\delta < \varepsilon \end{aligned}$$

则 $f$ 连续。

(ii): 反证存在这样的一一映射, 设为 $h(x)$ 。 $\partial B(0, 1)$ 为闭集, 取 $h(z) = h(\omega)$ , 则必有 $z = \omega$ , 而单位圆上可取 $z \in (-\varepsilon, 0)$ ,  $\omega \in (0, \varepsilon)$ 则令 $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $z \neq \omega$ 矛盾。或者利用

$$T(e^{i\theta}) = 2\pi \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, s.t., z - \omega = 2k\pi$$

即 $h$ 不为一一映射。 □

注 1.7.3. 另解: 参见[8]/P<sub>350</sub>问题8.8的第二题。

9. 设 $f$ 是域 $D$ 上的复变函数,  $z_0 \in \partial D$ . 若 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ 存在, 则称 $A$ 是 $f$ 在 $z_0$ 处的边界值, 记为 $f(z_0) = A$ . 举例说明, 存在开正方形 $G$ 上的同胚映射, 其不能在 $G$ 上处处都有边界值。

证明. 定义函数 $f(z) = \frac{1}{1-z}$ , 取开正方形的边长为2, 中心在原点且边长与坐标轴平行。则

$$\forall z_1 \neq z_2, f(z_1) \neq f(z_2), f^{-1}(z) = 1 - \frac{1}{z}$$

且

$$f^{-1}(z_1) = f^{-1}(z_2) \Leftrightarrow z_1 = z_2$$

则 $f$ 为开正方形 $G$ 上的同胚映射。

我们取 $z_0 = 1 \in \partial G$ , 显然此时有

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1-z} = \infty$$

则极限不存在, 于是 $f$ 在 $G$ 上不能处处有边界值。 □

注 1.7.4. 关于类似知识可参考[1]/P<sub>229</sub>, P<sub>230</sub>。

另解: 参见[8]/P<sub>350</sub>问题8.8的第三题。

## 第2章 全纯函数

### 2.1 复变函数的导数

1. 研究下列函数的可微性: (i)  $f(z) = |z|$ ; (ii)  $f(z) = |z|^2$ ; (iii)  $f(z) = \operatorname{Re} z$ ; (iv)  $f(z) = \arg z$ ; (v)  $f(z)$  为常数.

证明. (i):  $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ , 则  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{z}{2f(z)}$ , 则  $z \neq 0$  时不可微. 而  $z = 0$  时, 用定义

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta z|}{\Delta z} = e^{-i\theta}$$

与  $\theta$  有关, 即不可微.

(ii): 易知  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z$ , 则  $z = 0$  时可微, 其他情况不可微.

(iii):  $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$ , 则

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

即处处不可微.

(iv): 设  $z = x + iy$ ,  $f(z) = u + iv$ ,  $\arg z = \arctan \frac{y}{x} \Rightarrow v \equiv 0$

$$u_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}, u_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

则若满足 Cauchy—Riemann 方程, 必须有

$$\begin{cases} u_x = 0 \Rightarrow x \neq 0, y = 0 \\ u_y = 0 \Rightarrow x = 0, y \neq 0 \end{cases}$$

矛盾! 则不可微.

(v):  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ , 即处处可微. □

2. 设  $f$  和  $g$  都在  $z_0$  处可微, 且  $f(z_0) = g(z_0) = 0, g'(z_0) \neq 0$ . 证明:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

证明. 利用

$$LHS = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{g(z) - g(z_0)} = RHS$$

即证。  $\square$

3. 设  $f$  和  $g$  分别是域  $D$  和域  $G$  上的全纯函数, 如果  $f(D) \subset G$ , 那么  $g \circ f$  也是  $D$  上的全纯函数, 而且

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z).$$

证明. 利用

$$(g \circ f)'(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g \circ f(z) - g \circ f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g \circ f(z) - g \circ f(z_0)}{f(z) - f(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = g'(f(z))f'(z)$$

$\square$

注 2.1.1. 或者参考 [4]P<sub>35</sub> 验证定义

$$\forall z_0 \in D, \zeta_0 = f(z_0) \in G, g(\zeta) - g(\zeta_0) = g'(\zeta_0)(\zeta - \zeta_0) + \varepsilon(\Delta\zeta)\Delta\zeta$$

$$\lim_{\Delta\zeta \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta\zeta) = 0, \Delta\zeta = \zeta - \zeta_0$$

补充定义  $\varepsilon(0) = 0$ , 取  $\zeta = f(z)$ ,  $\zeta_0 = f(z_0)$  代入。

$$g \circ f(z) - g \circ f(z_0) = g' \circ f(z_0)(f(z) - f(z_0)) + \varepsilon(\Delta f)\Delta f$$

同时除以  $\Delta z$ , 令  $\Delta z \rightarrow 0$ , 此时  $\Delta f \rightarrow 0$  我们推出

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

由  $z_0$  任意性即证明。

4. 设域  $G$  和域  $D$  关于实轴对称. 证明: 如果  $f(z)$  是  $D$  上的全纯函数, 那么  $\overline{f(\bar{z})}$  是  $G$  上的全纯函数.

证明.  $f(z)$  是  $D$  上全纯, 域  $G$  和域  $D$  关于实轴对称, 则  $\forall \omega \in G$ ,  $\overline{f(\omega)}$  是  $G$  上全纯, 再由对称性  $\bar{z} = \omega$ , 即证。  $\square$

注 2.1.2. 可参考 Schwarz 反射原理进行理解。

## 2.2 Cauchy-Riemann方程

1. 设 $D$ 是 $\mathbb{C}$ 中的域,  $f \in H(D)$ . 如果对每一个 $z \in D$ , 都有 $f'(z) = 0$ , 证明 $f$ 是一常数.

证明. 我们有

$$\forall z_1, z_2 \in D, f(z_2) - f(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} f'(z) dz = 0$$

则 $f$ 在 $D$ 中恒为一个常数, 证毕. □

2. 设 $f \in H(D)$ , 并且满足下列条件之一:

- (i)  $\operatorname{Re} f(z)$ 是常数; (ii)  $\operatorname{Im} f(z)$ 是常数; (iii)  $|f(z)|$ 是常数;  
 (iv)  $\arg f(z)$ 是常数; (v)  $\operatorname{Re} f(z) = (\operatorname{Im} f(z))^2, z \in D$ , 那么 $f$ 是一常数.

证明. 考虑利用第1题的结论.

(i):  $\operatorname{Re} f(z) = \frac{f(z) + \overline{f(z)}}{2} = C$ , 两边同时对 $z$ 求导并利用 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 即证.

(ii): 同(i), 或者反证, 利用 $\operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z) = f(z)$ 即可.

(iii): 利用 $|f(z)|^2 = (\operatorname{Re} f(z))^2 + (\operatorname{Im} f(z))^2$ 拆开求导即可.

(iv): 反证. 利用 $f(z) = |f(z)|e^{i \arg f(z)}$ , 即可.

(v): 考虑

$$\arctan \frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Re} f(z)} = \arctan \frac{1}{\operatorname{Im} f(z)}$$

注意到 $\frac{1}{\operatorname{Im} f(z)} \in \mathbb{R}$ , 利用(iv)即证明. □

**注 2.2.1.** 另解参考[2]P<sub>57</sub>(简要如下)

$u, v$ 为常数则利用Cauchy-Riemann方程

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

同理如果 $u^2 + v^2$ 为常数, 则两端对 $x$ 求导有

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

两端再对 $y$ 求导, 利用Cauchy-Riemann方程可以化为上一种情形.

而 $\arg f(z)$ 为常数时, 可以令 $u = kv$ , 利用

$$0 = u - kv = \operatorname{Re}(1 + ik)f$$

即证明。

3. 设  $z = x + iy$ , 证明  $f(z) = \sqrt{xy}$  在  $z = 0$  处满足 Cauchy-Riemann 方程, 但  $f$  在  $z = 0$  处不可微<sup>1</sup>.

证明. ([9]P<sub>11</sub>)

$$f(z) \in \mathbb{R}, u_x = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}, u_y = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}, v_x = v_y = 0$$

即  $z = 0$  时满足 Cauchy-Riemann 方程。而

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} = \frac{\sqrt{xy}(x - iy)}{x^2 + y^2}$$

我们取

$$x = \alpha t, y = \beta t$$

则原式为

$$\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha + i\beta}$$

令  $z \rightarrow 0$ , 极限不唯一。即证明。 □

4. 设  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ,  $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ , 证明 Cauchy-Riemann 方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{cases}$$

证明. 参考[10]P<sub>42</sub>. 利用  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  及多元求导公式。

$$\begin{cases} u_x x_r + u_y y_r = u_r, \\ v_y y_r + v_x x_r = v_r, \\ v_x x_\theta + v_y y_\theta = v_\theta, \\ u_x x_\theta + u_y y_\theta = u_\theta. \end{cases}$$

反解出  $u_x, u_y, v_x, v_y$ , 并利用 Cauchy-Riemann 方程即证明。 □

5. 设  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ . 证明:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} e^{i\theta} \left( \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right), \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} e^{-i\theta} \left( \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right).$$

---

<sup>1</sup>严格来说, 应该改为  $f(z) = \sqrt{|xy|}$ .

证明. 利用

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta, \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial x} r (-\sin \theta)$$

代入(以二式为例)为

$$\frac{1}{2} e^{-i\theta} \left( \frac{\partial f}{\partial x} (\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y} (\sin \theta - i \cos \theta) \right).$$

提出即证明。  $\square$

6. 设  $\mathbf{s}$  和  $\mathbf{n}$  是两个平面向量, 将  $\mathbf{s}$  按逆时针方向旋转  $\frac{\pi}{2}$  即为  $\mathbf{n}$ . 如果  $f = u + iv$  是全纯函数, 证明

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial v}{\partial \mathbf{s}}. \end{cases}$$

证明. 不妨设  $\mathbf{s} = x + iy$ , 则

$$\mathbf{n} = -y + ix \iff \vec{\mathbf{s}} = (x, y), \vec{\mathbf{n}} = (-y, x)$$

则

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{s}} = (u_x, u_y)(x, y), \\ \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = (v_x, v_y)(-y, x), \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = (u_x, u_y)(-y, x), \\ \frac{\partial v}{\partial \mathbf{s}} = (v_x, v_y)(x, y). \end{cases}$$

利用  $f$  全纯, 验证成立即可。  $\square$

7. 设  $D$  是  $\mathbb{C}$  中的域,  $f \in C^2(D)$ . 证明: 对每个  $z \in D$ , 有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}(z).$$

证明. 参考命题2.2.8, 直接验证

$$LHS = RHS = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \quad \square$$

8. 设  $D$  是  $\mathbb{C}$  中的域,  $f \in H(D)$ ,  $f$  在  $D$  中不取零值. 证明: 对任意  $p > 0$ , 有<sup>2</sup>

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) |f(z)|^p = p^2 |f(z)|^{p-2} |f'(z)|^2.$$

<sup>2</sup> 其实  $p$  可以改成  $\forall \alpha, \alpha p$  都成立 (齐次性)。

证明. 等价于证明

$$4 \frac{\partial^2 f(z)^{\frac{p}{2}} \overline{f(z)^{\frac{p}{2}}}}{\partial z \partial \bar{z}} = p^2 |f(z)|^{p-2} |f'(z)|^2$$

利用 $f$ 在 $D$ 中不取零值,约去等式两边我们等价于证明

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial z} = |f'(z)|^2$$

设 $f(z) = u + iv$ , 并利用 $f \in H(D)$ , 我们有

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f'(z) = u_x - iu_y, \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = u_x + iu_y$$

即证完。 □

9. 设 $D$ 是 $\mathbb{C}$ 中的域,  $f = u + iv \in C^1(D)$ . 证明:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2.$$

特别地, 当 $f \in H(D)$ 时, 有

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right| = |f'|^2.$$

给出上面等式的几何意义.

证明.

$$\begin{aligned} RHS &= \left| \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \\ &= \left| \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} (-i) \right| \\ &= |u_x^2 - u_y^2 - 2iu_x u_y| \\ &= \sqrt{(u_x^2 - u_y^2)^2 + 4(u_x u_y)^2} \\ &= u_x^2 + u_y^2 \\ &= LHS. \end{aligned}$$

特别的,

$$f \in H(D) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

即证明。 □

10. 设 $D$ 是域,  $n$ 是自然数. 证明:  $f \in C^n(D)$ 当且仅当 $\frac{\partial^n f}{\partial z^k \partial \bar{z}^{n-k}}$ 在 $D$ 上连续,  $0 \leq k \leq n$ .

证明. 利用第七题, 归纳即得, 细节留给读者.  $\square$

11. 设  $D$  是域,  $f: D \rightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  是非常数的全纯函数, 则  $\log |f(z)|$  和  $\arg f(z)$  是  $D$  上的调和函数, 而  $|f(z)|$  不是  $D$  上的调和函数.

证明.

$$u(z) := \log |f(z)| = \frac{1}{2} \log z \bar{z}$$

则

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2\bar{z}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

而注意到

$$\operatorname{Log} f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z)$$

利用  $f$  全纯且不为 0. 利用

$$\frac{\partial^2 \operatorname{Log} f(z)}{\partial \bar{z} \partial z} = \frac{\partial^2 \operatorname{Log} f(z)}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

及  $u(z)$  调和即证  $\arg f(z)$  调和. 利用第八题的结论, 取  $p = 1$ . 有

$$4 \frac{\partial^2 |f(z)|}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{|f'(z)|^2}{|f(z)|}$$

如果  $|f(z)|$  调和, 则必有  $|f'(z)| \equiv 0$ , 再利用第一题的结论,  $f$  恒为一常数, 与  $f$  为非常数矛盾! 我们完成了证明.  $\square$

12. 设  $D, G$  是域,  $f: D \rightarrow G$  是全纯函数. 证明: 若  $u$  是  $G$  上的调和函数, 则  $u \circ f$  是  $D$  上的调和函数.

证明. 利用

$$\frac{\partial(u \circ f)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z}$$

则有

$$\frac{\partial^2(u \circ f)}{\partial \bar{z} \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0$$

$\square$

13. 设  $u$  是域  $D$  上的调和函数,  $\varphi$  是  $u(D)$  上的实函数. 证明:  $\varphi \circ u$  是  $D$  上的调和函数当且仅当  $\varphi$  是线性函数.

证明. 当且: 不妨设  $\varphi = kx + b$ , 则  $\varphi \circ u(z) = ku(z) + b$ ,  $u$  在  $D$  上调和, 则  $\varphi \circ u$  在  $D$  上调和。

仅当: 注意到  $\varphi$  为实函数, 且  $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \neq 0$  ( $u(z)$  调和). 而  $\varphi \circ u$  在  $D$  上调和等价于

$$\frac{\partial^2(\varphi \circ u)}{\partial \bar{z} \partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z} \partial z} \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

利用第七题的结论, 等价于

$$\frac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

因为 $\varphi$ 为实函数, 直接积分则有 $\varphi$ 为线性函数.  $\square$

14. 设 $D, G$ 是域,  $u \in C^2(G), \varphi \in H(D)$ , 并且 $\varphi(D) \subset G$ . 证明:  $\Delta(u \circ \varphi) = \Delta u |\varphi'|^2$ .

证明. 类似12题, 我们有

$$\begin{cases} \frac{\partial(u \circ \varphi)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial^2(u \circ \varphi)}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases}$$

利用 $\varphi(D) \subset G$ , 则我们只需要证明

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = \overline{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)}$$

只需注意到

$$LHS = \frac{1}{2}(\varphi_x + i\varphi_y) = \overline{\frac{1}{2}(\varphi_x - i\varphi_y)} = RHS \quad \square$$

15. 举例说明: 存在 $B(0, 1) \setminus \{0\}$ 上的调和函数, 它不是 $B(0, 1) \setminus \{0\}$ 上全纯函数的实部.

证明. 取 $f(z) = \operatorname{Re} z$ , 容易验证

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

或者 $g(z) = \log |z| = \frac{1}{2} \log z \bar{z}$ , 有

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2\bar{z}} \neq 0 \quad \square$$

16. 设 $f = u + iv, z_0 = x_0 + iy_0$ . 证明:

(i) 如果极限  $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  存在, 那么  $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$  和  $\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$  存在, 并且相等;

(ii) 如果极限  $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  存在, 那么  $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$  和  $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$  存在, 而且

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

证明. (i): 注意到

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{Re} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \operatorname{Im} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im} \frac{f(z) - f(z_0)}{-i(z - z_0)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\end{aligned}$$

(ii):注意到

$$\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Re}[-if(z)]$$

利用(i)即证。  $\square$

17. 证明: 若 $f(z)$ 在 $z_0$ 处实可微, 并且 $\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right|$ 存在, 则 $f(z)$ 和 $\overline{f(z)}$ 必有一个在 $z_0$ 处可微.

证明. 如果 $f$ 恒为常数, 结论自动成立. 则不妨设 $f$ 不为常数. 利用

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \sqrt{\left( \operatorname{Re} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right)^2 + \left( \operatorname{Im} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right)^2}$$

和第16题, 则有

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

而在 $z_0$ 处

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y + i(u_y + v_x)) = 0$$

注意到

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \frac{|u(z) - u(z_0) + i(v(z) - v(z_0))|}{|z - z_0|} = \frac{|v(z) - v(z_0) + i(u(z) - u(z_0))|}{|z - z_0|}$$

于是对 $g = v + iu$ 也成立, 利用16题的结论有

$$v_x(x_0, y_0) = u_y(x_0, y_0), \quad v_y(x_0, y_0) = -u_x(x_0, y_0)$$

则在 $z_0$ 处

$$\frac{\partial \overline{f(z)}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x + v_y + i(u_y - v_x)) = 0$$

显然, 以上四个式子同时成立时

$$v_x(x_0, y_0) = u_y(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0) = 0$$

此时 $f$ 恒为常数, 矛盾! 于是 $f(z)$ 和 $\overline{f(z)}$ 必有一个在 $z_0$ 处可微。  $\square$

18. 证明: 若 $u(x, y)$ 是 $x, y$ 的调和多项式, 则

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0, 0)$$

是 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数, 并且对任意 $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$ .

证明. 易知 $f(z)$ 也为调和多项式. 由

$$\forall z \in \mathbb{C}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

即证明全纯, 而利用 $\overline{u(z)} = u(\bar{z})$ . 代入等价于证明

$$u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) + u\left(\frac{\bar{z}}{2}, \frac{-\bar{z}}{2i}\right) - u(0, 0) = u\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right)$$

定义 $h(z, \bar{z}) = LHS - RHS$ , 则有

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = 0$$

利用第一题结论则 $h(z, \bar{z}) = C$ , 代入 $(0, 0)$ 点即得 $C = u(0, 0)$ , 即证. □

注 2.2.2. 另解(参见[2] $P_{21}$ )



## 2.3 导数的几何意义

1. 求映射  $w = \frac{z-i}{z+i}$  在  $z_1 = -1$  和  $z_2 = i$  处的转动角和伸缩率.

证明. 利用

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2i}{(z+i)^2}$$

则

$$|f'(-1)| = 1, \arg f'(-1) = \pi$$

$$|f'(i)| = \frac{1}{2}, \arg f'(i) = -\frac{\pi}{2}$$

□

2. 设  $f$  是域  $D$  上的全纯函数, 且  $f'(z)$  在  $D$  上不取零值. 试证:

(i) 对每一个  $u_0 + iv_0 \in f(D)$ , 曲线  $\operatorname{Re} f(z) = u_0$  和曲线  $\operatorname{Im} f(z) = v_0$  正交;

(ii) 对每一个  $r_0 e^{i\theta_0} \in f(D) \setminus \{0\}$ ,  $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ , 曲线  $|f(z)| = r_0$  与曲线  $\arg f(z) = \theta_0$  正交.

证明. (i): 注意到  $f'(z) \neq 0$ , 则  $f(z)$  保角. 而显然  $\operatorname{Re} z$  与  $\operatorname{Im} z$  正交, 即证明.

(ii): 类似(i)作换元即可.

□

3. 设  $f$  在  $B(0, 1) \cup \{1\}$  上全纯, 并且

$$f(B(0, 1)) \subset B(0, 1), f(1) = 1,$$

证明  $f'(1) \geq 0$ . 提示: 在  $f'(1) \neq 0$  的情形下, 证明  $\arg f'(1) = 0$ .

证明. 严谨证明(刘太顺): 由  $f$  全纯, 则在 1 的小邻域内可导,  $f(z)$  有意义. 我们有

$$f(z) = 1 + f'(1)(z-1) + o(|z-1|), \quad z \in \overline{B(0, 1)} \cap U(1, \delta)$$

由条件  $|f(z)| \leq 1$ , 代入有

$$|1 + f'(1)(z-1) + o(|z-1|)|^2 \leq 1 \iff |-1 + f'(1)(1-z) + o(|z-1|)|^2 \leq 1$$

则我们有

$$1 - 2 \operatorname{Re} f'(1)(1-z) + o(|1-z|) \leq 1$$

等价于

$$\operatorname{Re} f'(1) \frac{1-z}{|1-z|} \geq \frac{o(|1-z|)}{|1-z|}$$

令  $z \rightarrow 1$ , 注意到  $\frac{1-z}{|1-z|}$  模长为1, 即形如  $e^{i\theta}$  形式。则考虑此时  $\theta$  的范围, 利用  $1-z$  的几何意义, 易知此时  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  (各个方向趋近于1) 利用  $\theta$  的任意性。考虑取  $\theta = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0$

我们有

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(-if'(1)) \geq 0, \iff \operatorname{Im} f'(1) \leq 0 \\ \operatorname{Re}(if'(1)) \geq 0, \iff \operatorname{Im} f'(1) \geq 0 \\ \operatorname{Re}(f'(1)) \geq 0. \end{cases}$$

我们完成了证明。 □

**注 2.3.1.** 几何上看: 考虑  $z_0 = 1, f(1) = 1$  由  $\arg f'(1) = 0$  ( $f$  自身映到自身, 转动角为0, 否则在1的附近的小邻域会被旋转出去, 与  $f$  把圆面映到自己矛盾)

则  $f'(1) = |f'(1)|e^{i \arg f'(1)} \geq 0$ 。

4. 设  $f \in H(B(0,1))$ , 如果存在  $z_0 \in B(0,1) \setminus \{0\}$ 。使得  $f(z_0) \neq 0, f'(z_0) \neq 0$ , 且  $|f(z_0)| = \max_{|z| \leq |z_0|} |f(z)|$ , 那么

$$\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} > 0.$$

证明. 考虑构造  $g(z) = \frac{f(z_0 z)}{f(z_0)}$ , 验证满足第三题所有条件, 利用上题即证明。 □

## 2.4 初等全纯函数

1. 验证  $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ .

证明. 令  $z = x + iy$  则

$$\overline{e^z} = e^x (\cos y - i \sin y) = e^{\bar{z}} \quad \square$$

2. 求  $|e^{z^2}|$  和  $\arg e^{z^2}$ .

证明.  $|e^{z^2}| = \sqrt{e^{z^2} e^{\bar{z}^2}} = e^{x^2 - y^2} = e^{\operatorname{Re} z^2}$

我们有

$$e^{z^2} = e^{x^2 - y^2 + 2ixy} = e^{x^2 - y^2} e^{2ixy}$$

即  $\arg e^{z^2} = 2xy + 2k\pi$ . □

3. 证明: 若  $e^z = 1$ , 则必有  $z = 2k\pi i, k = 0, \pm 1, \dots$ .

证明. 设  $z = x + iy$  易知必有

$$x = 0, \quad y + 2k\pi = 0$$

则必有  $z = 2k\pi i, k = 0, \pm 1, \dots$  □

4. 设  $f$  是整函数,  $f(0) = 1$ . 证明: (i) 若  $f'(z) = f(z)$  对每个  $z \in \mathbb{C}$  成立, 则  $f(z) \equiv e^z$ ; (ii) 若对每个  $z, w \in \mathbb{C}$ , 有  $f(z+w) = f(z)f(w)$ , 且  $f'(0) = 1$ , 则  $f(z) \equiv e^z$ .

证明. (i): 利用

$$(f(z)e^{-z})' = 0$$

则  $f(z) = ce^z$ , 代入  $f(0) = 1$ , 即证。

(ii): 两端对  $z$  求导, 有

$$f'(z+w) = f'(z)f(w)$$

代入  $w = 0$ , 化为 (i), 即证. □

5. 试证: (i)  $\overline{\operatorname{Log} z} = \operatorname{Log} \bar{z}, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ; (ii)  $\overline{\log z} = \log \bar{z}, \forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ .

证明. (i) 可取出全纯分支后等价于 (ii), (由辐角的几何性质)。而 (ii)

$$LHS = \overline{\log |z| + i \arg z} = RHS \quad \square$$

6. 求  $\operatorname{Re}(\log z^2)$  和  $\operatorname{Im}(\log z^2), z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

证明.

$$\log z^2 = \log |z^2| + i \arg z^2 = \log(x^2 + y^2)^2 + 2i \arg z$$

分别取Re和Im即可。 □

7. 设  $f$  在  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  中全纯,  $f(1) = 0$ . 证明:

(i) 若  $f'(z) = e^{-f(z)}$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ , 则  $f(z) \equiv \log z$ ;

(ii) 若  $f(zw) = f(z) + f(w)$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ,  $w \in (0, \infty)$ , 且  $f'(1) = 1$ , 则  $f(z) \equiv \log z$ .

证明. (i): 令

$$g(z) = e^{f(z)} - z \Rightarrow g'(z) = 0$$

则  $g(z) = c$ , 代入  $f(1) = 0$ . 利用  $\log z$  的定义即证明。

(ii): 两端对  $z$  求导

$$wf'(zw) = f'(z)$$

令  $z = 1$ , 利用  $e^{f(z)} = z$  注意到

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{\frac{e^{f(z)} - e^{f(z_0)}}{f(z) - f(z_0)}} = \frac{1}{e^{f(z_0)}} = \frac{1}{z_0}$$

即证  $f(z) \equiv \log z$ . □

8. 证明:  $f(z) = z^2 + 2z + 3$  在  $B(0, 1)$  中单叶.

证明.  $z_1 \neq z_2$  时,

$$f(z_1) = f(z_2) \iff z_1 + z_2 + 2 = 0$$

显然  $z_1 \neq z_2$ , 且  $z_1, z_2 \in B(0, 1)$  时,  $z_1 + z_2 + 2 \neq 0$ , 即证. □

9. 若  $\frac{p}{q}$  ( $q > 0$ ) 是有理数, 证明:  $z^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{z})^p$ .

证明.

$$LHS = |z^{\frac{p}{q}}| e^{i(\arg z^{\frac{p}{q}} + 2k\pi)}, RHS = (|z^{\frac{1}{q}}| e^{i(\arg z^{\frac{1}{q}} + 2k\pi)})^p$$

而

$$p \arg z^{\frac{1}{q}} = \arg z^{\frac{p}{q}}$$

即证. □

10. 验证  $\overline{z^\mu} = \overline{z}^\mu$ .

证明. 利用书上  $P_{58}, (3)$  直接带入计算即可。  $\square$

11. 验证  $z^{2\mu}, (z^\mu)^2$  和  $(z^2)^\mu$  是否相等, 并说明理由.

证明. 前两个相等. 注意到

$$z^{2\mu} = e^{2\mu \operatorname{Log}(z)}, (z^\mu)^2 = (e^{\mu \operatorname{Log}(z)})^2 = e^{2\mu \operatorname{Log}(z)}, (z^2)^\mu = e^{\mu \operatorname{Log}(z^2)}$$

其中注意

$$2 \operatorname{Log}(z) \neq \operatorname{Log}(z^2), 2 \log(z) = \log(z^2)$$

因为辐角不为主值支。  $\square$

注 2.4.1. 尽管你可以取特定的  $k_1, k_2$  使得  $2 \operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}(z^2)$ 。

12. 设  $f$  在  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  上全纯,  $f(1) = 1, \mu > 0$ . 证明:

(i) 若  $f'(z) = \mu \frac{f(z)}{z}, z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ , 则

$$f(z) \equiv |z|^\mu e^{i\mu \arg z};$$

(ii) 若  $f(zw) = f(z)f(w), z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], w \in (0, \infty)$ , 且  $f'(1) = \mu$ , 则

$$f(z) \equiv |z|^\mu e^{i\mu \arg z}.$$

证明. (i): 利用

$$z^\mu = e^{\mu \log z}$$

验证

$$g'(z) = (f(z)z^{-\mu})' \equiv 0$$

代入  $f(1) = 1$ , 即证。

(ii): 两端对  $z$  求导得

$$wf'(zw) = f'(z)f(w) \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], w \in (0, \infty)$$

令  $z = 1$ , 利用 (i) 即证。  $\square$

13. 验证  $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}, \overline{\cos z} = \cos \bar{z}$ .

证明. 直接带入表达式验证。  $\square$

14. 证明: (i)  $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$ ; (ii)  $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$ .

证明. 只证明(i),(ii)类似。

$$\begin{aligned} RHS &= \frac{1}{4} \left( (e^{iz} + e^{-iz})(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) + (e^{iz} - e^{-iz})(e^{i\omega} - e^{-i\omega}) \right) \\ &= \frac{1}{2} (e^{i(z+\omega)} + e^{-i(z+\omega)}) \\ &= LHS \end{aligned}$$

□

15. 称  $\varphi(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  为 **Rokovsky 函数**. 证明下面四个域都是  $\varphi$  的单叶性域:

- (i) 上半平面  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ ; (ii) 下半平面  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$ ;  
(iii) 无心单位圆盘  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ ; (iv) 单位圆盘的外部  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ .

证明. 断言 (i)  $\Leftrightarrow$  (ii), (iii)  $\Leftrightarrow$  (iv) (通过作  $\bar{z}, \frac{1}{z}$  变换). 而

$$\varphi(z_1) = \varphi(z_2) \iff z_1 \neq z_2, \quad z_1 z_2 = 1$$

(i): 令  $z_k = r_k e^{i\theta_k}$ , 则  $r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = 1 \iff \theta_1 + \theta_2 = 2k\pi$ , 易知在上半平面上不可能, 则为单叶性域。

(iii): 同(i), 此时  $0 < |r_k| < 1$ , 则

$$1 = |r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}| < 1$$

矛盾!

□

16. 求上题中的四个域在映射  $\varphi(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  下的像.

证明.

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} \left( r e^{i\theta} + \frac{1}{r} e^{-i\theta} \right) = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta + \frac{i}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta = u + iv$$

(i)  $z = r e^{i\theta}, \theta \in (0, \pi)$ .

$$\frac{u^2}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{4} \left( r^2 + \frac{1}{r^2} + 2 \right), \quad \frac{v^2}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{4} \left( r^2 + \frac{1}{r^2} - 2 \right) \Rightarrow \frac{u^2}{\cos^2 \theta} - \frac{v^2}{\sin^2 \theta} = 1$$

为上半双曲线

(iii)  $z = r e^{i\theta}, r \in (0, 1)$ .

$$\left( \frac{u}{\frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right)} \right)^2 + \left( \frac{v}{\frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right)} \right)^2 = 1$$

为椭圆. 不难看出此时像为

$$(i), (ii) : \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

$$(iii), (iv) : \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$$

□

注 2.4.2. 详细讨论参见[4]P<sub>43</sub>.

17. 证明下面三个域都是  $\cos z$  和  $\sin z$  的单叶性域:

- (i) 条形域  $\{z \in \mathbb{C} : \theta_0 < \operatorname{Re} z < \theta_0 + \pi\}$ ;
- (ii) 半条形域  $\{z \in \mathbb{C} : \theta_0 < \operatorname{Re} z < \theta_0 + 2\pi, \operatorname{Im} z > 0\}$ ;
- (iii) 半条形域  $\{z \in \mathbb{C} : \theta_0 < \operatorname{Re} z < \theta_0 + 2\pi, \operatorname{Im} z < 0\}$ .

证明. 我们只考虑  $\cos z$ , 对于  $\sin z$ , 作  $z - \frac{\pi}{2}$  平移变换即可。

(i): 利用

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

通过作复合映射不难看出只需考虑  $f(z)$  在  $D_1$  中的像, 其中

$$D_1 = \{z : \theta_0 < \operatorname{Arg} z < \theta_0 + \pi\}, \quad f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

利用第十五题, 考虑对单叶域作旋转变换可得其单叶。

(ii): 类似于(i), 即考虑

$$D_1 = \{z : 0 < |z| < 1, \theta_0 < \operatorname{Arg} z < \theta_0 + 2\pi\}, \quad f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

再利用第十五题可证。

(iii): 利用(ii), 作共轭变换即可。 □

18. 证明:  $w = \cos z$  将半条形域

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi, \operatorname{Im} z > 0\}$$

一一地映为  $\mathbb{C} \setminus [-1, \infty)$ .

证明. 利用上一题(ii), 记号保持不变, 则单叶性即证, 而考虑边界时有

$$f(|z| = 1) = [-1, 1], \quad f(\operatorname{Arg} z = 0) = [1, \infty)$$

于是通过并补运算, 即  $w$  将半条形域一一映为

$$\mathbb{C} \setminus [-1, \infty)$$
□

19. 证明:  $w = \sin z$  将半条形域

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0 \right\}$$

一一地映为上半平面.

证明.

$$w = \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$$

作变换  $u = z - \frac{\pi}{2}$ , 则有函数复合

$$w = \frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right), \quad z_1 = e^{iu}$$

此时

$$u \in \{-\pi < \operatorname{Re} u < 0, \operatorname{Im} u > 0\} \longrightarrow z_1 \in \{B(0, 1) \setminus \{0\}, -\pi < \arg z < 0\}$$

于是  $w$  被映为上半平面。 □

20. 证明  $B(0, 1)$  是  $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$  的单叶性域, 并求出  $f(B(0, 1))$ .

证明. 易知  $z \neq 1$ , 当  $z_1 \neq z_2$  时

$$f(z_1) = f(z_2) \iff z_1 z_2 = 1$$

设  $z_k = r_k e^{i\theta_k}$ , 要使乘积为 1 等价于  $r_k = 1$  (否则取模即可), 且  $(\theta_k \in (0, 2\pi))$

$$e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = 1 \iff \theta_1 + \theta_2 = 0 \quad \text{or} \quad \theta_1 + \theta_2 = 2\pi$$

当  $\theta_1 + \theta_2 = 0$  时, 利用  $z_1 \neq z_2 \Rightarrow \theta_1 \neq n\pi$ . 若  $\theta_1 = \pi$ , 易知  $\theta_2 = -\pi$ , 矛盾!

当  $\theta_1 + \theta_2 = 2\pi$  时, 同上等价于  $\theta_1 \neq (2n+1)\pi$ . 若  $\theta_1 = \pi$ , 易知此时  $\theta_2 = \pi$ , 则  $z_1 = z_2$ , 也矛盾! 综上所述得  $B(0, 1)$  是  $f(z)$  的单叶性域.

而

$$f(z) = \frac{1}{z + \frac{1}{z} - 2}$$

利用第十五题的 Rookovsky 函数, 参见 [4]  $P_{46}$ , 我们知道

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

把单位圆内部映为  $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$ , 则  $\frac{1}{f(z)}$  把单位圆内部映为  $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-4, 0]$ , 再作  $\frac{1}{z}$  变换. 于是

$$f(z) \in \overline{\mathbb{C}} \setminus [-\infty, -\frac{1}{4}].$$

即证! □

21. 当 $z$ 按逆时针方向沿圆周 $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ 旋转一圈后, 计算下列函数辐角的增量:

(i)  $(z-1)^{\frac{1}{2}}$ ; (ii)  $(1+z^4)^{\frac{1}{3}}$ ; (iii)  $(z^2+2z-3)^{\frac{1}{4}}$ ; (iv)  $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ ; (v)  $\left(\frac{z^2-1}{z^2+5}\right)^{\frac{1}{7}}$ .

证明. 仿照2.4节的5中的讨论, 易知增量为

$$(i) : e^{i\pi}, (ii) : e^{i\frac{2\pi \cdot 4}{3}}, (iii) : e^{i\frac{2\pi}{4}}, (iv) : e^{i\frac{2\pi}{2} - i\frac{2\pi}{2}} = e^0, (v) : e^{i\frac{2\pi \cdot 2}{7}} \quad \square$$

22. 设 $f(z) = \frac{z^{p-1}}{(1-z)^p}$ ,  $0 < p < 1$ . 证明:  $f$ 能在域 $D = \mathbb{C} \setminus [0, 1]$ 上选出单值的全纯分支.

证明. 取 $\gamma_0$ 只围绕0,  $\gamma_1$ 只围绕1, 辐角改变量分别为 $e^{i2\pi(p-1)} \neq 1$ ,  $e^{i2\pi(-p)} \neq 1$ , 则均为支点. 再取 $\infty$ 远点, 辐角改变量为 $e^{i2\pi(p-1-p)} = 1$ , 不为支点. 可连接 $[0, 1]$ , 则 $f$ 能在域 $D = \mathbb{C} \setminus [0, 1]$ 上选出单值的全纯分支.  $\square$

23. 证明:  $f(z) = \text{Log}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)$ 能在域

$$D = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [0, 1])$$

上选出单值的全纯分支.

证明. 只需要讨论 $\frac{z^2-1}{z}$ 是否有辐角变化, 我们分别取 $\gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1$ 只绕 $-1, 0, 1$ 点, 易知均为支点, 再取 $\gamma$ 绕 $-1, 1, 0$ 点, 则 $\infty$ 也为支点. 直接连接 $[-\infty, -1], [0, 1]$ , 此时 $f(z)$ 能在域 $D$ 上选出单值的全纯分支.  $\square$

24. 设单叶全纯映射 $f$ 将域 $D$ 一一地映为 $G$ , 证明:  $G$ 的面积为

$$\iint_D |f'(z)|^2 dx dy.$$

证明. ([2]P<sub>75</sub>) 设 $D$ 为点集,

$$S(D) = \iint_D dx dy$$

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , 则利用变量替换, 有

$$S(f(D)) = \iint_D |u_x v_y - u_y v_x| dx dy$$

再利用Cauchy-Riemann方程, 即证明.  $\square$

25. 设 $f$ 是域 $D$ 上的单叶全纯映射,  $z = \gamma(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ) 是 $D$ 中的光滑曲线. 证明:  $w = f(\gamma(t))$ 的长度为

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f'(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt.$$

证明. 参看[2]P<sub>75</sub>:注意到在映射下线段长度被乘上 $|f'(z)|$ , 则面积应被乘上 $|f'(z)|^2$ . 利用 $z(t) = x(t) + iy(t)$ , 设曲线为 $\gamma(t)$ 则

$$L(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} |z'(t)| dt$$

$\gamma'$ 由 $\omega(t) = f(z(t))$ 确定, 则 $\omega'(t) = f'(z(t))z'(t)$ 则

$$L(\gamma') = \int_{\alpha}^{\beta} |f'(z(t))||z'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} |f'(\gamma(t))||\gamma'(t)| dt. \quad \square$$

注 2.4.3. 参考书上[11]命题3.1.2

26. 设 $D$ 是 $z$ 平面上去掉线段 $[-1, i]$ ,  $[1, i]$ 和射线 $z = it$  ( $1 \leq t < \infty$ )后所得的域, 证明函数 $\text{Log}(1 - z^2)$ 能在 $D$ 上分出单值全纯分支. 设 $f$ 是满足 $f(0) = 0$ 的那个分支, 试计算 $f(2)$ 的值.

证明. 考虑 $\text{Arg}(1 + z) + \text{Arg}(1 - z)$ , 容易验证 $z = -1, 1$ 均为支点, 而 $\infty$ 不为支点. 而 $1 - z^2 \neq 0 \iff z \neq \pm i$ . 连接 $[-1, i]$ ,  $[1, i]$ , 则 $\text{Log}(1 - z^2)$ 能在 $D$ 上分出单值全纯分支.

我们有

$$f(z) = \log|1 - z^2| + i\text{Arg}(1 - z^2) = \log|1 - z^2| + i\arg(1 - z^2) + 2k\pi i$$

代入 $f(0) = 0$ , 即

$$0 = i \arg 1 + 2k\pi i$$

显然此时取 $k = 0$ 的分支, 则

$$f(2) = \log|-3| + i\arg(-3) = \log 3 + \pi i \quad \square$$

27. 证明函数 $\sqrt[4]{(1 - z)^3(1 + z)}$ 能在 $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ 上选出一个单值全纯分支 $f$ , 满足 $f(i) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{8}i}$ . 试计算 $f(-i)$ 的值.

证明. 取简单闭曲线 $\gamma$ 绕 $[-1, 1]$ . 注意到 $e^{i\frac{2\pi(3+1)}{4}} = 1$ , 则绕一圈后值不改变, 则可以选出单值全纯分支. 我们有

$$f(z) = \exp\left\{\frac{1}{4}\left(\log|(1 - z)^3(1 + z)| + i\arg(1 - z)^3(1 + z) + 2k\pi i\right)\right\}$$

代入 $f(i) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{8}i}$ 可得

$$\begin{aligned} \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{8}i} &= \exp\left\{\frac{1}{4}\left(\log 4 + i\arg(-4i) + 2k\pi i\right)\right\} \\ &= \sqrt{2}\exp\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{3\pi i}{2} + 2k\pi i\right)\right\} \end{aligned}$$

可见取得是 $k = -1$ 的分支(当然你也可以取 $k = 3$ 的分支), 下面运算先保留 $k$ , 以方便看清其不妨性。此时代入 $z = -i$ 可得

$$\begin{aligned} f(-i) &= \exp\left\{\frac{1}{4}\left(\log |4i| + i \arg 4i + 2k\pi i\right)\right\} \\ &= \sqrt{2}\exp\left\{i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right)\right\} \\ &= \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{8}} \end{aligned}$$

可以看见取 $k = -1, 3$  或其他值并不会改变最后答案。(因为 $e^{i\theta}$ 的周期性质)

□



## 2.5 分式线性变换

1. 试求把上半平面映为上半平面的分式线性变换, 使得  $\infty, 0, 1$  分别映为  $0, 1, \infty$ .

证明. 显然为

$$T(z) = \frac{1}{1-z} \quad \square$$

2. 求出把上半平面映为单位圆盘的分式线性变换, 使得  $-1, 0, 1$  分别映为  $1, i, -1$ .

证明. 线性变换把实轴变为单位圆周, 由于  $a, \bar{a}$  关于实轴对称, 类似例 2.5.15, 注意  $a$  必为纯虚数.

$$T(z) = \lambda \frac{z-a}{z-\bar{a}}$$

代入  $T(0) = i, T(-1) = 1$ , 解得  $a = i, \lambda = -i$ .

$$T(z) = (-i) \frac{z-i}{z+i} \quad \square$$

3. 证明: 分式线性变换  $w = \frac{az+b}{cz+d}$  的把上半平面映为上半平面的充要条件是  $a, b, c, d$  都是实数, 而且  $ad - bc > 0$ .

证明.  $\Rightarrow$ : 利用分式线性变换把实轴映为实轴, 于是易知此时  $a, b, c, d$  全为实数. 而

$$w(i) = \frac{ac + bd + (ad - bc)i}{c^2 + d^2}$$

于是必定有

$$ac + bd > 0, ad - bc > 0.$$

$\Leftarrow$ : 注意到

$$z = 0, 1, \infty. \quad w(z) \in \mathbb{R}$$

所以把实轴映为实轴, 而此时

$$w'(z) \neq 0$$

所以映射是保角的, 即把上半平面映为上半平面.  $\square$

4. 试求把单位圆盘的外部  $\{z : |z| > 1\}$  映为右半平面  $\{w : \operatorname{Re} w > 0\}$  的分式线性变换, 使得

(i)  $1, -i, -1$  分别变为  $i, 0, -i$ ; (ii)  $-i, i, 1$  分别变为  $i, 0, -i$ .

证明. (i): 利用第2题, 点作  $\frac{1}{z}$ , (化为第二题条件), 圆盘内  $(T^{-1}(z)) \rightarrow$  上半平面 (乘  $(-i)$ )  $\rightarrow$  右半平面, 可得  $T(z) = \frac{z+i}{z-i}$ .

(ii): 我们有交比关系

$$(w, i, 0, -i) = (z, -i, i, 1)$$

计算得

$$T(z) = \frac{z-i}{(2-i)z+2i-1}$$

□

**定义 2.5.1 (交比).** 给定点中至少三点不同, 则定义交比为

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \bigg/ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

5. 试求把上半平面映为自己的分式线性变换, 使得实轴上的点  $x_1, x_2, x_3$  ( $x_1 < x_2 < x_3$ ) 分别映为  $0, 1, \infty$ .

证明. 设

$$T(z) = \lambda \frac{z - x_1}{z - x_3}$$

代入  $T(x_2) = 1$ , 即得

$$T(z) = \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} \cdot \frac{z - x_1}{z - x_3}$$

□

6. 证明:  $z_1, z_2$  关于圆周  $\left| \frac{z-z_1}{z-z_2} \right| = \lambda$  ( $\lambda > 0$ ) 对称.

提示: 利用习题1.2中第15题的结果.

证明.  $\lambda=1$  时显然成立. 利用结果

$$a = \frac{z_1 - \lambda^2 z_2}{1 - \lambda^2}, \quad R = \frac{\lambda |z_1 - z_2|}{|1 - \lambda^2|}.$$

代入可算得

$$|z_1 - a| = \frac{\lambda^2 |z_2 - z_1|}{|1 - \lambda^2|}, \quad |z_2 - a| = \frac{|z_2 - z_1|}{|1 - \lambda^2|}$$

则关于圆周对称.

□

7. 设  $z_1, z_2$  是关于圆周  $\gamma = \{z : |z - a| = R\}$  的一对对称点, 证明:  $\gamma$  可以写成

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \lambda$$

这种形式, 其中,  $\lambda = \frac{R}{|z_2 - a|} = \frac{|z_1 - a|}{R}$ .

证明. 由于 $z_1, z_2$ 关于 $\gamma$ 对称, 设 $z_k = a + r_k e^{i\theta_k}, z = a + R e^{i\theta}$ , (注意到对称即暗含 $z_k, a$ 共线, 即 $\theta_1 = \theta_2$ )

代入即 $r_1 r_2 = R^2$ , 若 $r_1 = r_2 = R$ , 请读者自己验证成立(  
若 $r_1 \neq r_2$ , 不妨设 $r_1 > r_2$ , 则 $r_1 > R, r_2 < R$ , 带入等价于

$$\left| \frac{R e^{i\theta} - r_1 e^{i\theta_1}}{R e^{i\theta} - r_2 e^{i\theta_2}} \right| = \left| \frac{R - r_1}{R - r_2} \right| = \left| \frac{R}{r_2} \right|$$

即证。 □

8. 设 $z_1 \neq z_2$ , 分式线性变换 $w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ 满足 $T(z_j) \neq \infty, j = 1, 2$ . 证明:  $T$ 把圆周 $\left| \frac{z-z_1}{z-z_2} \right| = \lambda$ 映为圆周

$$\left| \frac{w - T(z_1)}{w - T(z_2)} \right| = \lambda \left| \frac{cz_2 + d}{cz_1 + d} \right|.$$

注意: 本题给出了圆周及其对称点在分式线性变换下的不变性的另一个证明.

证明. 注意到

$$T(z_1) - T(z_2) = \frac{(ad - bc)(z_1 - z_2)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)}$$

直接相比有

$$LHS = \left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| \left| \frac{cz_2 + d}{cz_1 + d} \right| = \left| \frac{w - T(z_1)}{w - T(z_2)} \right| = \lambda \left| \frac{cz_2 + d}{cz_1 + d} \right|. \quad \square$$

9. 证明:  $z_1, z_2$ 关于圆周

$$az\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + d = 0$$

对称的充要条件是

$$az_1\bar{z}_2 + \bar{\beta}z_1 + \beta\bar{z}_2 + d = 0.$$

证明. 利用1.2节第14题

$$\left| z + \frac{\beta}{a} \right| = \sqrt{\frac{|\beta|^2 - ad}{a^2}} = R$$

$\Rightarrow$ : 利用

$$\left| z_1 + \frac{\beta}{a} \right| \cdot \left| z_2 + \frac{\beta}{a} \right| = R^2$$

展开即证明。

$\Leftarrow$ : 将式子因式分解倒推以上即证明。 □

10. 设  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  是一个分式线性变换, 如果记

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

那么

$$T^{-1}(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

证明. 设  $z = \frac{z_1}{z_2}$ ,  $T(z) = \frac{T(z_1)}{T(z_2)}$ , 则

$$T(z) = \frac{T(z_1)}{T(z_2)} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(z_1) \\ T(z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

把  $T(z)$ ,  $z$  分别换成  $z$ ,  $T^{-1}(z)$ , 即证。 □

11. 设  $T_1(z) = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ ,  $T_2(z) = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$  是两个分式线性变换, 如果记

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

那么

$$(T_1 \circ T_2)(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

证明. 完全同10。

$$(T_1 \circ T_2)(z) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = T(z).$$

即证。 □

12. 设  $\Gamma$  是过  $-1$  和  $1$  的圆周,  $z$  和  $w$  都不在圆周上. 如果  $zw = 1$ , 那么  $z$  和  $w$  必分别位于  $\Gamma$  的内部或外部.

证明. 利用对称性, 其圆心在 $y$ 轴上, 设圆周与其交于 $z_1 = iy_1, z_2 = iy_2$ , 其中 $y_1 < y_2$ . 显然有(直径对角为直角)

$$(1, y_1) \cdot (1, y_2) = 0 \Rightarrow 1 + y_1 y_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = \frac{1}{z_2}$$

我们不妨设 $z$ 在内部, 外部同理。由条件 $w = \frac{1}{z} = T(z)$ 可知其为分式线性变换。

而 $z$ 在圆周上依次过 $1, z_2, -1$ 的左侧, 由分式线性变换的性质可得 $T(z) = w$ 依次过 $T(1) = 1, T(z_2) = z_1, T(-1) = -1$ 的左侧, 而其把圆周映到圆周, 于是 $w$ 依次过 $1, z_1, -1$ 的左侧, 即 $w$ 在圆周外侧(读者可自己画图理解)。□

13. 求一分式线性变换, 把 $B(0, 1)$ 映为 $B(0, 1)$ , 且把 $\frac{1}{2}, 2, \frac{5}{4} + \frac{3}{4}i$ 分别映为 $\frac{1}{2}, 2, \infty$ 。

证明. 注意到分式线性变换把 $\frac{1}{2}, 2$ 一一对映到 $\frac{1}{2}, 2$ 。设

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = z$$

于是

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0 = c(z - 2)(z - \frac{1}{2})$$

由Vieta定理

$$\frac{5}{2} = \frac{a - d}{c}, \quad 1 = -\frac{b}{c}$$

设 $\frac{d}{c} = \lambda$ , 此时

$$T(z) = \frac{\left(\frac{5}{2} + \lambda\right)z - 1}{z + \lambda}$$

注意到

$$T\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}i\right) = \infty \Leftrightarrow \lambda = -\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}i\right)$$

于是所求的分式线性变换为

$$T(z) = \frac{(5 - 3i)z - 4}{4z - (5 + 3i)}$$

□

14. 求一单叶全纯映射, 把沿线段 $[0, 1]$ 有割缝的单位圆盘映为上半平面。

证明. **Step1** 考虑

$$w_1 = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

此时

$$|z| = 1 \rightarrow [-1, 1], \quad |z| < 1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus [-1, 1], \quad [0, 1] \rightarrow [1, +\infty)$$

故  $D$  被映为:

$$\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus [-1, +\infty)$$

**Step2** 考虑映射  $w_2 = w_1 + 1$

$$\Omega_1 \rightarrow \Omega_2 = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$$

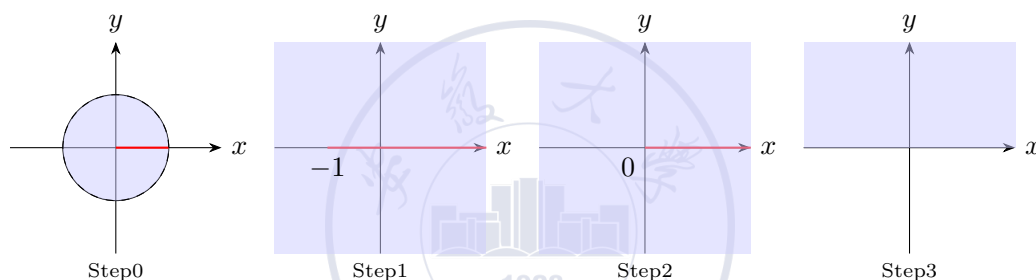
**Step3** 取主支平方根:

$$\zeta = \sqrt{w_2}$$

将  $\Omega_2$  单叶全纯地映为上半平面  $\{\operatorname{Im} \zeta > 0\}$ 。综上

$$f(z) = \sqrt{\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) + 1}$$

□



15. 求一单叶全纯映射, 把除去线段  $[0, 1+i]$  的第一象限映为上半平面.

证明. **Step1** 考虑映射

$$w_1 = z^2$$

此时第一象限映为上半平面, 线段  $[0, 1+i]$  映为  $[0, 2i]$ 。故  $G$  被映为:

$$\Omega_1 = \{\operatorname{Im} w_1 > 0\} \setminus [0, 2i]$$

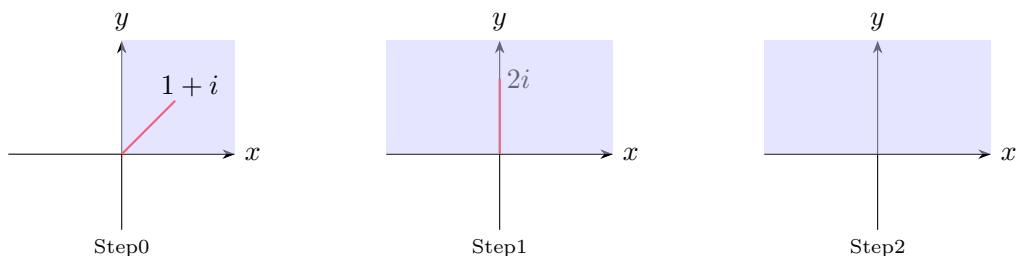
**Step2** 利用书上例2.4.5, 直接作

$$w_2 = \sqrt{w_1^2 + 4}$$

把  $\Omega_1$  映为上半平面。综上, 映射为

$$f(z) = \sqrt{z^4 + 4}$$

□



16. 求一单叶全纯映射, 把半条形域

$$\left\{z : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0\right\}$$

映为上半平面, 且把  $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0$  分别映为  $1, -1, 0$ .

证明. 利用第十九题, 取

$$\omega = \sin z$$

即可。 □

17. 求一单叶全纯映射, 把除去线段  $[a, a + hi]$  的条形域  $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$  映为条形域  $\{w : 0 < \operatorname{Im} w < 1\}$ , 其中,  $a$  是实数,  $0 < h < 1$ .

证明. 仿照2.4节的例2.4.5, 可得

$$f(z) = \sqrt{(z-a)^2 + 1}$$
□

18. 求一单叶全纯映射, 把图 2.1 所示的月牙形域映为  $B(0, 1)$ .

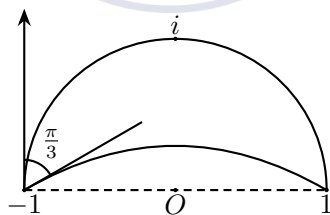


图 2.1

证明. 通过作与射线垂直线找到圆心计算得小弧与虚轴交于  $(0, (2 - \sqrt{3}))$ .

**Step1** 作  $w = \frac{z-1}{z+1}$  将  $z = 1$  映为  $w = 0$ ,  $z = -1$  映为  $w = \infty$ .

1. 对圆弧  $C_1$  ( $|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0$ ):

令  $z = e^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ), 则

$$w = \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

当  $\theta$  从 0 到  $\pi$ ,  $w$  沿正虚轴从 0 到  $\infty$ 。

2. 对圆弧  $C_2$  (过  $z = -1$  和  $z = 1$ ):

取点  $z = i(2 - \sqrt{3})$  (验证:  $|z - (0, -\sqrt{3})| = 2$ ), 则

$$w = \frac{i(2 - \sqrt{3}) - 1}{i(2 - \sqrt{3}) + 1} = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{4 - 2\sqrt{3}} + i \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 2\sqrt{3}}$$

易得  $\operatorname{Arg} w = \frac{5\pi}{6}$ 。因此月牙形域映为角域  $\left\{w : \frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} w < \frac{5\pi}{6}\right\}$ 。

**Step2** 作  $\xi = -iw$ , 角域变为:

$$0 < \operatorname{Arg} \xi < \frac{\pi}{3}$$

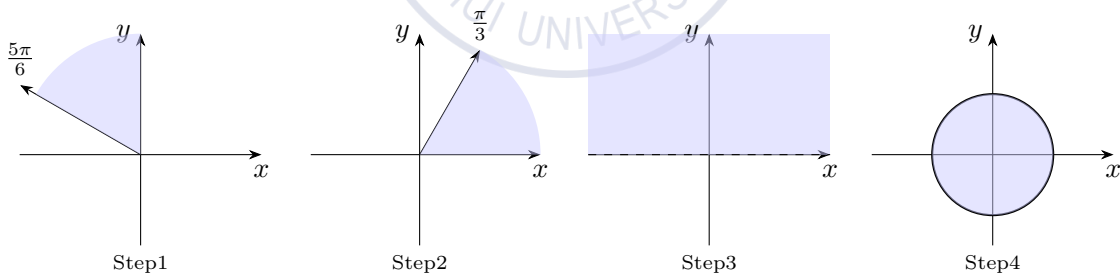
**Step3** 作  $\eta = \xi^3$ , 映为

$$0 < \operatorname{Arg} \eta < \pi = \{\eta : \operatorname{Im}(\eta) > 0\}$$

**Step4** 类似例2.5.15.取  $\zeta = \frac{\eta - i}{\eta + i}$  将上半平面单叶全纯地映到单位圆盘。综上作组合映射化简为

$$\zeta = \frac{-6z^2 - 2}{2z^3 + 6z} = -\frac{3z^2 + 1}{z(z^2 + 3)}$$

□



19. 求一单叶全纯映射, 把除去线段  $[1, 2]$  的单位圆盘的外部映为上半平面.

证明. **Step1** 作  $w_1 = \frac{z-1}{z+1}$ , 类似上一题, 易知映为

$$\mathbb{C} \setminus \left\{ \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup i \cdot [0, \infty) \right\}$$

**Step2** 作  $w_2 = iw_1$ , 映为

$$\mathbb{C} \setminus \left[-\infty, \frac{i}{3}\right]$$

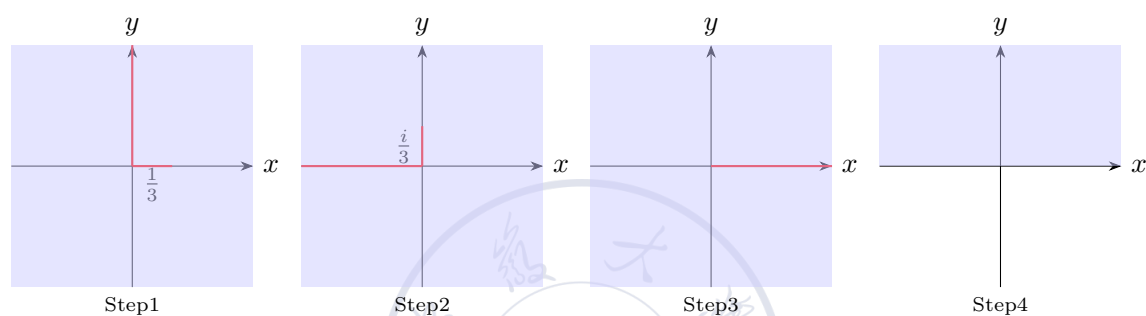
**Step3** 作  $z^2 + \frac{1}{9}$ , 映为

$$\mathbb{C} \setminus [0, \infty]$$

**Step4** 作  $\sqrt{z}$  即映为上半平面。作以上所有映射的复合即为

$$w = \sqrt{\left(i \frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \frac{1}{9}}$$

□



20. 求一单叶全纯映射, 把  $B(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  和  $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  的外部除去线段  $[-2i, 0]$  所成的域 (见图 2.4) 映为上半平面.

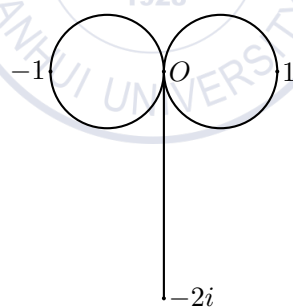


图 2.4

证明. **Step1** 作映射  $w_1 = \frac{1}{z}$ , 注意到

$$\left| \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{Re} \frac{1}{z} = -\frac{1}{|z|^2} \Leftrightarrow \operatorname{Re} w_1 = -1$$

于是

$$B\left(\pm\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \rightarrow \operatorname{Re} w_1 = \pm 1, \quad [-2i, 0] \rightarrow \left\{iy \mid y \geq \frac{1}{2}\right\}$$

区域  $D$  被映为带域:

$$\Omega_1 = \{w_1 \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} w_1 < 1\} \setminus \left\{iy \mid y \geq \frac{1}{2}\right\}$$

**Step2** 旋转和平移映射  $w_2 = i\pi w_1 + \frac{\pi}{2}$  将  $\Omega_1$  映为:

$$\Omega_2 = \{w_2 \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} w_2 < \pi\} \setminus (-\infty, 0]$$

**Step3** 作映射  $w_3 = e^{w_2}$  将  $\Omega_2$  映为

$$\Omega_3 = \{w_3 \in \mathbb{C} : w_3 \in B(0, 1) \setminus (-1, 0)\}$$

**Step4** 我们取  $w_4 = -w_3$  使其满足第14题的格式。

$$\Omega_4 = \{w_4 \in \mathbb{C} : w_4 \in B(0, 1) \setminus (0, 1)\}$$

**Step5** 最后利用第14题的结论取

$$w_5 = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\left(w_4 + \frac{1}{w_4}\right)}$$

综上, 我们得到复合映射为

$$f(z) = \sqrt{1 - \cos\left(\frac{i\pi}{z} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

□

21. 设  $0 < r < a$ , 求一单叶全纯映射, 把域

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |z - a| > r\}$$

映为同心圆环

$$\{w \in \mathbb{C} : \rho < |w| < 1\}.$$

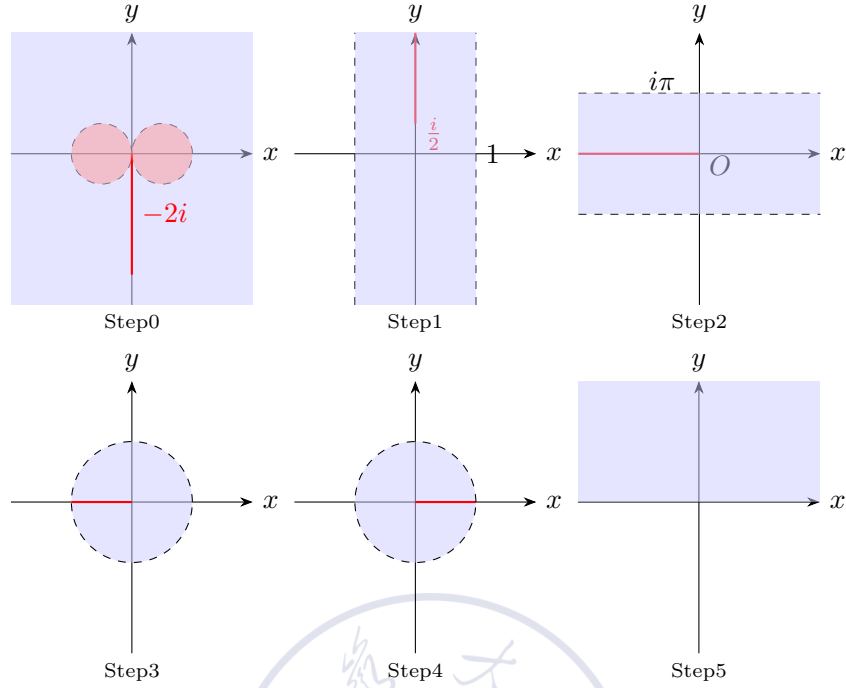
证明. **Step1**

$$\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 := \{z : \operatorname{Re} z = 0\} \cup \{z : |z - a| = r\}$$

考虑关于  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  均对称的一对点  $\alpha$  和  $\beta$ 。

关于  $\Gamma_1$  对称  $\Leftrightarrow \alpha + \beta = 0$ 。关于  $\Gamma_2$  对称即满足方程

$$(a - \alpha)(a - \beta) = r^2$$



解得( $a > r > 0$ )

不妨设

$$\alpha = \pm \sqrt{a^2 - r^2}$$

$$\alpha = -\sqrt{a^2 - r^2}, \quad \beta = \sqrt{a^2 - r^2}$$

**Step2** 考虑  $w = \lambda \frac{z - \beta}{z - \alpha}$ , 将  $\alpha$  映为  $\infty$ ,  $\beta$  映为  $0$ 。且要求  $\Gamma_1$  映为单位圆周  $|w| = 1$ , 取  $z = 0 \in \Gamma_1$ , 则

$$|w(0)| = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$$

不妨取  $\lambda = 1$ , 则

$$w = \frac{z - \sqrt{a^2 - r^2}}{z + \sqrt{a^2 - r^2}}$$

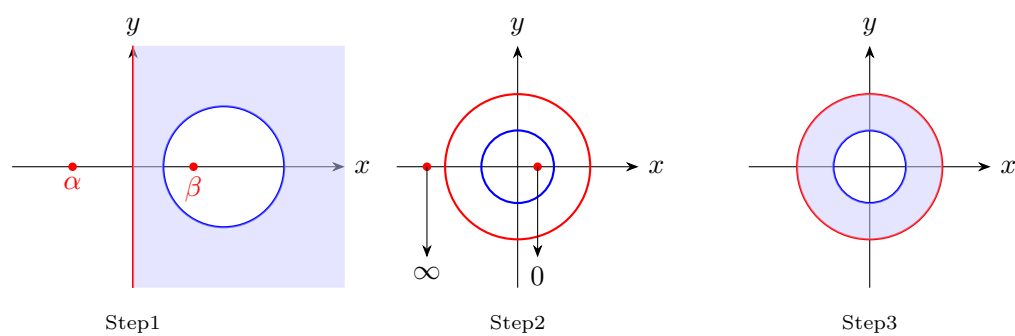
**Step3** 不难验证此时  $\Gamma_1$  映为  $|w| = 1$ 。则此时  $\Gamma_2$  映为  $|w| = \rho$ , 考虑解出  $\rho$ , 取  $z = a + r \in \Gamma_2$ , 我们有

$$\left| \frac{(a+r) - \sqrt{a^2 - r^2}}{(a+r) + \sqrt{a^2 - r^2}} \right| = \rho \Rightarrow \rho = \left| \frac{a+r - \sqrt{a^2 - r^2}}{a+r + \sqrt{a^2 - r^2}} \right| = \frac{a+r - \sqrt{a^2 - r^2}}{a+r + \sqrt{a^2 - r^2}}$$

综上, 所求单叶全纯映射为:

$$w = \frac{z - \sqrt{a^2 - r^2}}{z + \sqrt{a^2 - r^2}}, \quad \rho = \frac{a+r - \sqrt{a^2 - r^2}}{a+r + \sqrt{a^2 - r^2}}$$

□



## 第3章 全纯函数的积分表示

### 3.1 复变函数的积分

1. 计算积分  $\int_{\gamma} \frac{2z-3}{z} dz$ , 其中,  $\gamma$ 为

- (i) 沿圆周  $\{z: |z|=2\}$  的上半圆, 从  $-2$  到  $2$ ;
- (ii) 沿圆周  $\{z: |z|=2\}$  的下半圆, 从  $-2$  到  $2$ ;
- (iii) 沿圆周  $\{z: |z|=2\}$  的正向.

证明. 直接作  $z = 2e^{i\theta}$  换元形如

$$\int (4ie^{i\theta} - 3i) d\theta$$

(i):  $\theta$  从  $\pi$  到  $0$ , 代入算得为  $8 + 3\pi i$

(ii):  $\theta$  从  $\pi$  到  $2\pi$ , 代入算得为  $8 - 3\pi i$

(iii)(解法一): 由定义, 用(ii)-(i)即得为  $-6\pi i$ .

(解法二): 利用例3.1.4

$$\int_{\gamma} 2 - \frac{3}{z} dz = -3 \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = -6\pi i$$

□

2. 计算积分  $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z+2}$ , 并证明:

$$\int_0^{\pi} \frac{1 + 2 \cos \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta = 0.$$

证明. 利用Cauchy积分定理, 积分为0. 而设  $z = e^{i\theta}$ , 有

$$\frac{1}{z+2} = \frac{2 + \cos \theta - i \sin \theta}{5 + 4 \cos \theta}$$

注意到为偶函数且有周期性, 等价于证明

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 + 2 \cos \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta = 0.$$

代入计算得

$$0 = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z+2} = \int_0^{2\pi} \frac{-2\sin\theta + i(2\cos\theta + 1)}{5 + 4\cos\theta} d\theta$$

取Im即证明。 □

3. 计算积分  $\int_{|z|=3} \frac{2z-1}{z(z-1)} dz$ .

证明. 利用Cauchy积分定理和例3.1.4

$$LHS = \int_{|z|=3} \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} \right) dz = 2\pi i \cdot 2 = 4\pi i \quad \square$$

4. 如果多项式  $Q(z)$  比多项式  $P(z)$  高两次, 试证:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0.$$

证明. 取  $\bar{D} \subset B(0, R)$  则原式

$$\left| \int_{\partial B(0, R)} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})} iRe^{i\theta} d\theta \right| = \int_0^{2\pi} \left| \frac{P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})} R \right| d\theta$$

令  $R \rightarrow +\infty$ , 即为0. □

5. 计算积分  $\int_{|z|=r} z^n \bar{z}^k dz$ , 其中,  $n, k$  为整数.

证明.

$$\int_{|z|=r} z^n \bar{z}^k dz = \begin{cases} r^{2k} \int_{|z|=r} z^{n-k} dz & n > k \\ r^{2k} \int_{|z|=r} \frac{1}{z^{k-n}} dz & n < k \\ 0 & n = k \end{cases}$$

易知  $n \geq k$  时为0, 而  $k - n \geq 2$  时也为0, 则仅在  $k = n + 1$  时为  $2\pi i \cdot r^{2k}$ , 证毕。 □

6. 设  $f \in C^1(D)$ ,  $\gamma$  是域  $D$  中分别以  $a$  和  $b$  为起点和终点的可求长曲线. 证明:

$$\int_{\gamma} \left\{ \frac{\partial f(z)}{\partial z} dz + \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right\} = f(b) - f(a).$$

证明. 设  $z = x + iy$ , 直接代入  $\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$  表达式得。

$$LHS = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int_a^b df(x, y) = \int_a^b df(\gamma(t)) = RHS \quad \square$$

7. 设  $\gamma$  是可求长曲线,  $\varphi$  在  $\gamma$  上全纯,  $\Gamma = \varphi(\gamma)$ .

证明: (i)  $\Gamma$  也是可求长曲线;

(ii) 如果  $f$  在  $\Gamma$  上连续, 那么

$$\int_{\Gamma} f(w) dw = \int_{\gamma} f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz.$$

定义 3.1.1. 如果

$$\sup \sum_{k=1}^n |z(t_k) - z(t_{k-1})| < \infty \quad a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b, t_k \in \gamma$$

称弧段  $\gamma$  可求长。

证明. (i):  $\varphi$  在  $\gamma$  上全纯, 则  $\Gamma = \varphi(\gamma)$  分段可微, 即  $\Gamma$  可求长.

(ii): 利用  $\omega_k = \varphi(z_k)$

$$LHS = \sum_{k=1}^n f(\widetilde{\omega_k})(\omega_k - \omega_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\varphi(\widetilde{z_k})) \frac{(\varphi(z_k) - \varphi(z_{k-1}))}{z_k - z_{k-1}} (z_k - z_{k-1}) = RHS \quad \square$$

注 3.1.1. 参看 [2]P<sub>82</sub>。有以下定理

定理 3.1.1. 弧  $z = z(t)$  为可求长的, 当且仅当  $z(t)$  的实部与虚部都是有界变差的。即

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} |x(t_{k+1}) - x(t_k)| &< M \\ \sum_{k=0}^{n-1} |y(t_{k+1}) - y(t_k)| &< M \end{aligned}$$

特别的, 对于实函数而言, 其弧段可求长与其为有界变差函数是等价的, 这可以理解为有界变差函数的几何意义。

8. 设  $\gamma$  是域  $D$  中以  $a$  为起点、以  $b$  为终点的可求长曲线,  $f, g \in H(D) \cap C^1(D)$ . 证明分部积分公式:

$$\int_{\gamma} f(z) g'(z) dz = f(z) g(z) \Big|_a^b - \int_{\gamma} f'(z) g(z) dz.$$

证明. 移项

$$\int_{\gamma} f(z)g'(z) dz + \int_{\gamma} f'(z)g(z) dz = \int_{\gamma} (f(z)g(z))' dz = \int_{\gamma} \frac{\partial(f(z)g(z))}{\partial z} dz = f(z)g(z) \Big|_a^b \quad \square$$

9. 设 $\gamma$ 是正向可求长简单闭曲线, 证明:  $\gamma$ 内部的面积为

$$\frac{1}{2i} \int_{\gamma} \bar{z} dz.$$

证明. 设 $z = x + iy$ 直接代入有

$$\frac{1}{2i} \left( \int_{\gamma} x dx + y dy + i \int_{\gamma} x dy - y dx \right)$$

利用Green公式, 记 $\gamma = \partial D$ , 则为

$$\iint_D dx dy = S$$

即证.  $\square$

10. 设单叶全纯映射 $f$ 将可求长简单闭曲线 $\gamma$ 映为正向简单闭曲线 $\Gamma$ , 证明:  $\Gamma$ 内部的面积为

$$\frac{1}{2i} \int_{\gamma} \overline{f(z)} f'(z) dz.$$

证明. 利用 $f'(z)dz = df(z)$ 和第九题的结论即证.  $\square$

11. 设 $f$ 在 $z_0$ 处连续, 证明

$$(i) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = f(z_0);$$

$$(ii) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = f(z_0).$$

证明. (i): 利用 $f$ 在 $z_0$ 处连续 $\Leftrightarrow$

$$|f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)| < \varepsilon \quad r \rightarrow 0$$

则

$$|LHS - RHS| \leq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)| d\theta < \varepsilon$$

(ii): 直接作 $z = z_0 + re^{i\theta}$ , 利用(i)即可.  $\square$

12. 设  $D = \{z \in \mathbb{C} : \theta_0 < \arg(z - a) < \theta_0 + \alpha\}$  ( $0 < \alpha \leq 2\pi$ ),  $f$  在  $\overline{D} \setminus \{a\}$  上连续. 证明:  
 (i) 如果  $\lim_{\substack{z \rightarrow a \\ z \in \overline{D} \setminus \{a\}}} (z - a)f(z) = A$ , 那么

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ |z-a|=r \\ z \in \overline{D}}} \int f(z) dz = i\alpha A;$$

(ii) 如果  $\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \overline{D} \setminus \{a\}}} (z - a)f(z) = B$ , 那么

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ |z-a|=R \\ z \in \overline{D}}} \int f(z) dz = i\alpha B.$$

证明. (i):

$$LHS = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \alpha} f(a + re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta < (A + \varepsilon) \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \alpha} i d\theta = i\alpha(A + \varepsilon)$$

同理有

$$LHS > (A - \varepsilon) \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \alpha} i d\theta = i\alpha(A - \varepsilon)$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , 即证明。

(ii): 类似于(i)证明, 略去。 □

注 3.1.2. 有关的知识可参考 [2]  $P_{87}$ , 本书  $P_{210}$  引理 5.5.9.

13. 设  $D$  是域,  $f \in C^1(D)$ . 证明:  $f$  在  $D$  上全纯的充分必要条件是对任意  $a \in D$ , 均有

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z-a|=r} f(z) dz = 0.$$

证明. 设  $f(x, y) = u + iv$ , 则

$$\frac{1}{\pi r^2} \int_{|z-a|=r} f(z) dz = \frac{1}{\pi r^2} \int u dx - v dy + i(v dx + u dy)$$

利用 Green 公式,

$$RHS = \frac{1}{\pi r^2} \iint (-u_y - v_x) + i(-v_y + u_x) dx dy$$

利用实函数的中值定理有

$$RHS = -u_y(\xi, \eta) - v_x(\xi, \eta) + i(-v_y(\xi, \eta) + u_x(\xi, \eta))$$

注意到

$$r \rightarrow 0 \iff \xi + i\eta \rightarrow a$$

而  $f \in C^1(D) \Rightarrow u, v \in C^1(D)$ 。一方面  $f$  全纯显然能推出积分为0。

另一方面因为积分为0，由  $a$  的任意性可得必有

$$-u_y = v_x \quad v_y = u_x$$

(取Re和Im)即证。 □



## 3.2 Cauchy积分定理

1. 计算积分:

$$(i) \int_{|z|=r} \frac{|dz|}{|z-a|^2}, |a| \neq r; \quad (ii) \int_{|z|=2} \frac{2z-1}{z(z-1)} dz;$$

$$(iii) \int_{|z|=5} \frac{z dz}{z^4-1}; \quad (iv) \int_{|z|=2a} \frac{e^z}{z^2+a^2} dz, a > 0.$$

证明. (i): 作  $r = e^{i\theta}$ , 原式为(利用  $z = a$  的Cauchy积分公式)

$$\int_0^{2\pi} \frac{r}{(re^{i\theta})(re^{-i\theta} - \bar{a})} d\theta = \frac{r}{i} \int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)(r^2 - \bar{a}z)} = \frac{2\pi r}{r^2 - |a|^2}$$

(ii):

$$\int_{|z|=2} \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} \right) dz = 4\pi i$$

(iii): 直接因式分解得

$$LHS = \int_{|z|=5} \frac{1}{4} \left( \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i} \right) dz = 0$$

(iv): 令  $f(z) = \frac{e^z}{z^2 + a^2}$ , 我们取

$$\gamma_1 = \{z \mid |z - ia| = r_1\} \quad \gamma_2 = \{z \mid |z + ia| = r_2\} \quad \gamma_0 = \{z \mid |z| = 2a\}$$

其中  $r_1, r_2 \rightarrow 0$ . 则  $f$  在  $\partial D = \gamma_0 + \gamma_1^- + \gamma_2^-$  围成的区域  $D$  内全纯, 利用Cauchy积分定理, 积分值为0. 移项则

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

且

$$f(z) = \frac{1}{2ia} \left( \frac{e^z}{z-ia} - \frac{e^z}{z+ia} \right)$$

计算右边的第一项, 可以利用Cauchy积分公式, 取  $g(z) = e^z$ , 则积分值为

$$\frac{1}{2ia} 2\pi i \cdot g(ia) = \frac{\pi}{a} e^{ia}$$

但我们在这里给一种换元的方法. 作  $z = r_1 e^{i\theta} + ia$ , 则有

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \frac{1}{2ia} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{r_1 e^{i\theta} + ia}}{r_1 e^{i\theta} + 2ia} d\theta$$

令  $r_1 \rightarrow 0^+$ , 即得积分值为  $\frac{\pi}{a} e^{ia}$ 。

对于第二个积分, 完全同以上的方法, 作  $z = r_2 e^{i\theta} - ia$ , 计算得积分值为  $-\frac{\pi}{a} e^{-ia}$ , 于是原式为

$$\frac{\pi}{a} (e^{ia} - e^{-ia}) = \frac{2\pi i}{a} \sin a \quad \square$$

2. 设  $f$  在  $\{z : r < |z| < \infty\}$  中全纯, 且  $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = A$ . 证明:

$$\int_{|z|=R} f(z) dz = 2\pi i A,$$

这里,  $R > r$ .

证明. 相减得

$$|LHS - RHS| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R} \frac{|zf(z) - A|}{z} dz < \varepsilon$$

因为此时

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{|z|=R} |zf(z) - A| < \varepsilon \quad \square$$

3. 设  $n$  为正整数, 试通过计算积分

$$\int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z}$$

证明

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta = 2\pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

证明. (i): 原式为

$$\int_{|z|=1} \frac{\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k z^{2k}}{z^{2n+1}} dz$$

由Cauchy积分定理, 当  $k \geq n+1$  为0, 由例3.1.4, 当  $k \leq n-1$  时也为0. 则原式为  $2\pi i C_{2n}^n$ 。

(ii): 换元得

$$f(z) dz = \frac{2^{2n} \cos^{2n} \theta e^{i2n\theta}}{e^{i(2n+1)\theta}} i e^{i\theta} = i (2 \cos \theta)^{2n}$$

即

$$LHS = \frac{2\pi}{2^{2n}} C_{2n}^n = 2\pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \quad \square$$

4. 设  $0 < r < R$ ,  $f$  在  $B(0, R)$  中全纯. 证明: (i)  $f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta$ ; (ii)  $f(0) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z|<r} f(z) dx dy$ .

证明. (i):

$$RHS = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z} dz$$

而  $r > 0$  时, 在  $B(0, R) \setminus B(0, r)$  全纯, 利用推论 3.2.6, 积分值等于

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, \varepsilon)} \frac{f(z)}{z} dz$$

则 ( $f$  在 0 处连续)

$$LHS - RHS = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, \varepsilon)} \frac{f(z) - f(0)}{z} dz \leq \varepsilon$$

(ii): 利用 (i) 并作  $z = \rho e^{i\theta}$  换元有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z|<r} f(z) dx dy &= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r 2\pi f(0) \rho d\rho \\ &= f(0) \end{aligned}$$

□

5. 设  $u$  是  $B(0, R)$  中的调和函数,  $0 < r < R$ . 证明:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta.$$

证明. 利用一个定理, 其证明可见一般复变函数书。

**定理 3.2.1.** 单连通域上的调和函数是某一个全纯函数  $f$  的实部。

利用  $f(z) = u + iv$ ,  $f$  全纯, 利用第四题的 (i), 取  $\text{Re}$  即证明.

□

6. 设  $0 < r < 1$ . 证明:

$$\int_0^\pi \log(1 - 2r \cos \theta + r^2) d\theta = 0.$$

证明.

$$1 - 2r \cos \theta + r^2 = (r \cos \theta - 1)^2 + r^2 \sin^2 \theta = (re^{i\theta} - 1)(re^{-i\theta} - 1) = (z - 1)(\bar{z} - 1)$$

原式为(利用偶函数周期性等价于在0到 $2\pi$ 上积分)

$$\frac{1}{i} \int_{\gamma} \frac{\log(z-1)(\bar{z}-1)}{z} dz := \frac{1}{i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z} dz$$

则 $f(z) = \log |z-1|^2$ ,注意到

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{z-1} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} = 0$$

则 $f$ 在 $B(0,1)$ 上调和, 利用第五题的结论, 积分值应为 $2\pi f(0)$ , 而 $f(0) = \log 1 = 0$ ,即证明。

□



### 3.3 全纯函数的原函数

1. 设  $D$  是域,  $f, g \in H(D)$ . 如果  $fg'$  在  $D$  上有原函数  $\varphi$ . 证明:  $f'g$  在  $D$  上有原函数  $fg - \varphi$ .

证明. 利用3.1节的第八题

$$\int_{\gamma} f'(z)g(z) dz = f(z)g(z) \Big|_a^b - \int_{\gamma} f(z)g'(z) dz = fg - \varphi. \quad \square$$

2. 设  $D$  是域,  $f$  是  $D$  上的连续函数. 如果  $f$  在  $D$  上有原函数, 则对  $D$  中任意可求长简单闭曲线  $\gamma$ , 均有  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .

证明. 设原函数为  $F(z)$ , 于是取简单闭曲线满足

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

则

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b F'(\gamma(t)) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0 \quad \square$$

3. 设  $f \in C^n(\mathbb{C}) \cap H(\mathbb{C})$ , 并且  $f^{(n)}(z) \equiv 0$ . 证明:  $f$  必为次数不大于  $n-1$  的多项式.

证明. 利用归纳法,  $k=1$  时利用习题2.2的第一题, 设  $k=n-1$  时成立.

$$f^{(n)} \equiv 0 \Rightarrow f^{(n-1)} = C$$

于是

$$g(z) = f(z) - \frac{Cz^{n-1}}{(n-1)!}$$

且有

$$g(z)^{(n-1)} \equiv 0 \Rightarrow \deg g \leq n-2 \Leftrightarrow \deg f \leq n-1 \quad \square$$

4. 设  $\gamma$  是从0到1且不经过  $\pm i$  的可求长曲线. 证明:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

证明. 注意到

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right)$$

类似本节图3.7和图3.8的拆分方式。可取 $\gamma_1$ 沿着实轴从1到0。

(i)如果 $\gamma$ 围成区域里没有 $\pm i$ ，则由Cauchy积分定理为0，而此时 $y \equiv 0$ ，原积分为

$$\int_{\gamma_1^-} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

(ii)如果 $\gamma$ 围成区域包含 $\pm i$ ，易知相互抵消为0。

(iii)如果 $\gamma$ 围成区域里只有 $\pm i$ 中的一个，不妨设为 $i$ 。则辐角增量为 $\frac{1}{2i} 2k\pi i = k\pi$ ，其中 $k$ 代表绕的圈数，大于0意味着沿着逆时针绕。即证。  $\square$

5. 设 $f$ 是凸域 $D$ 上的全纯函数，如果对每点 $z \in D$ ，有 $\operatorname{Re}\{f'(z)\} > 0$ ，那么 $f$ 是 $D$ 上的单叶函数。

证明。利用习题2.2的第十六题，可知

$$u_x > 0 \quad v_y > 0$$

考虑 $f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$ ，设 $z_k = x_k + iy_k$ ，则

$$f(z_1) = f(z_2) \iff u(x_1, y_1) = u(x_2, y_2), v(x_1, y_1) = v(x_2, y_2)$$

分别固定 $x, y$ ，利用 $u_x > 0, v_y > 0$ ，则可知

$$x_1 = x_2 \quad y_1 = y_2 \Rightarrow z_1 = z_2$$

即证。  $\square$

注 3.3.1. 另解：

$$\forall z_1 \neq z_2 \in D, f(z_2) - f(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} f'(\zeta) d\zeta = \int_0^1 f'(z_1 + t(z_2 - z_1))(z_2 - z_1) dt$$

即

$$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = \int_0^1 f'(z_1 + t(z_2 - z_1)) dt$$

两边同时取 $\operatorname{Re}$ ，有

$$\operatorname{Re} \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = \int_0^1 \operatorname{Re} f'(z_1 + t(z_2 - z_1)) dt > 0$$

则必定有

$$f(z_1) \neq f(z_2)$$

则 $f$ 是 $D$ 上的单叶函数。

### 3.4 Cauchy积分公式

1. 计算下列积分:

$$\begin{aligned} & \text{(i)} \int_{|z-1|=1} \frac{\sin z}{z^2-1} dz \quad \text{(ii)} \int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^2} \quad \text{(iii)} \int_{4x^2+y^2=2y} \frac{e^{\pi z}}{(1+z^2)^2} dz \\ & \text{(iv)} \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} \quad \text{(v)} \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^3(z-1)^3(z-3)^5} \quad \text{(vi)} \int_{|z|=R} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)} \end{aligned}$$

其中(vi)中的 $n$ 为正整数,  $a, b$ 不在圆周 $|z|=R$ 上.

证明. (i)取 $f(z) = \sin z$

$$\frac{\sin z}{z^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin z}{z-1} - \frac{\sin z}{z+1} \right)$$

而 $\frac{\sin z}{z+1}$ 在 $|z-1|=1$ 中全纯。则原式为

$$\frac{1}{2} 2\pi i f(1) = \pi i \sin 1$$

(ii)直接分解有

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \int_{|z|=2} \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} dz = 0$$

(iii)代入 $\pm i$ 易知 $-i$ 在区域外部,  $i$ 在区域内部。取 $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2}$ , 则结果为

$$2\pi i f'(z) \Big|_{z=i} = \frac{\pi^2 i - \pi}{2}$$

(iv)直接分解有

$$\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) \frac{1}{z^2+4}$$

取 $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$ , 应用Cauchy积分公式得结果为0.

(v)类似例3.4.7, 我们取 $\gamma = \{z | |z| = R > 3\}$ , 记 $\gamma_0 = \{z | |z| = 2\}$ ,  $f(z) = \frac{1}{z^3(z-1)^3}$ 则

$$\int_{\gamma_0^-} \frac{dz}{z^3(z-1)^3(z-3)^5} + \int_{\gamma} \frac{dz}{z^3(z-1)^3(z-3)^5} = \frac{2\pi i}{4!} f^{(4)}(z) \Big|_{z=3}$$

显然

$$\left| \int_{\gamma} \right| \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty$$

于是

$$\int_{\gamma_0} \frac{dz}{z^3(z-1)^3(z-3)^5} = -\frac{2\pi i}{4!} f^{(4)}(z) \Big|_{z=3}$$

利用软件或者暴力计算有

$$f^{(4)}(z) \Big|_{z=3} = \frac{1697}{3888}$$

即

$$\int_{\gamma_0} \frac{dz}{z^3(z-1)^3(z-3)^5} = -\frac{\pi i}{12} \frac{1697}{3888} = -\frac{1697\pi i}{46656}$$

(vi)分四种情况

1.  $a, b$ 在圆外, 易知此时结果为0.
2.  $b$ 在圆内部,  $a$ 在圆外部. 由Cauchy积分公式有

$$\frac{2\pi i}{(z-a)^n} \Big|_{z=b} = \frac{2\pi i}{(b-a)^n}$$

3.  $a$ 在圆内部,  $b$ 在圆外部. 由Cauchy积分公式有

$$\frac{2\pi i}{(n-1)!} \left( \frac{1}{z-b} \right)^{(n-1)} \Big|_{z=a} = -\frac{2\pi i}{(b-a)^n}$$

4.  $a, b$ 都在圆内, 取 $\gamma_a = \overline{B(a, \varepsilon)}$ ,  $\gamma_b = \overline{B(b, \varepsilon)}$ , 且 $\overline{B(a, \varepsilon)} \cap \overline{B(b, \varepsilon)} = \emptyset$ , 利用Cauchy积分定理, 等价于在 $\gamma_a, \gamma_b$ 上积分, 利用Cauchy积分公式有

$$\frac{2\pi i}{(n-1)!} \left( \frac{1}{z-b} \right)^{(n-1)} \Big|_{z=a} + \frac{2\pi i}{(z-a)^n} \Big|_{z=b} = 0 \quad \square$$

2. 设 $\gamma$ 是可求长简单闭曲线, 其内部为域 $G_1$ , 外部为域 $G_2$ . 如果 $f \in H(G_2) \cap C(\overline{G_2})$ , 而且

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A,$$

那么

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} -f(z) + A, & z \in G_2; \\ A, & z \in G_1, \end{cases}$$

这里,  $\gamma$ 关于 $G_1$ 取正向. 通常, 称它为无界域的Cauchy积分公式.

证明. 参照([4]P<sub>91</sub>)我们取充分大的 $|z| = R$ ,  $\partial D = \{z | |z| = R\} + \gamma^-$ 于是

$$\forall z_0 \in D \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z) - A}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{A}{z - z_0} dz$$

而

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z) - A}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z) - A}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) - A}{z - z_0} dz$$

注意到

$$\left| \int_{|z|=R} \frac{f(z) - A}{z - z_0} dz \right| \leq \max_{|z|=R} |f(z) - A| \frac{2\pi R}{|R| - |z_0|}$$

令 $R \rightarrow +\infty$ , 利用此时

$$\max_{|z|=R} |f(z) - A| \leq \varepsilon$$

可知

$$f(z_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) - A}{z - z_0} dz + A \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{1}{z - z_0} dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) - A}{z - z_0} dz + A$$

注意到此时

$$\forall z_0 \in D \Leftrightarrow z_0 \in G_2$$

移项, 作 $z \rightarrow \zeta, z_0 \rightarrow z$ 替换, 即证。而当 $z \in G_1$ 时, 显然在 $G_2$ 外部, 则有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

利用 $z \in G_2$ 的情况即证。 □

3. 设 $D$ 是由有限条可求长简单闭曲线围成的域,  $z_1, \dots, z_n$ 是 $D$ 中 $n$ 个彼此不同的点. 如果 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$ , 证明:

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\omega_n(\zeta)} \frac{\omega_n(\zeta) - \omega_n(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

是次数不超过 $n - 1$ 的多项式, 并且

$$P(z_k) = f(z_k), k = 1, 2, \dots, n.$$

其中,  $\omega_n(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n)$ .

提示:  $\frac{\omega_n(\zeta) - \omega_n(z)}{\zeta - z}$ 是 $z$ 的次数不超过 $n - 1$ 的多项式.

证明. 设  $h(z) = w_n(\zeta) - w_n(z)$  为  $n$  次多项式, 且  $h(\zeta) = 0$ , 则

$$h(z) = (z - \zeta)g(z) \quad \deg g \leq n - 1$$

即证明了提示. 利用3.3节的第三题, 直接对上式求导可得

$$(P(z))^{(n)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\omega_n(\zeta)} (g(z))^{(n)} d\zeta \equiv 0$$

则  $\deg P(z)$  不大于  $n$ , 即  $\deg P(z)$  不超过  $n - 1$ . 而

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\omega_n(z)}{\omega_n(\zeta)(\zeta - z)} d\zeta = f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\omega_n(z)}{\omega_n(\zeta)(\zeta - z)} d\zeta$$

$$P(z_k) = f(z_k) \quad (\forall k, \omega_n(z_k) = 0)$$

□

4. 称

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n$$

是 **Legendre** 多项式. 证明:

(i) Legendre 多项式有如下的积分表示:

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{2^n (\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

其中,  $\gamma$  是任意内部包含  $z$  的可求长简单闭曲线;

(ii) 如果取

$$\gamma = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - x| = \sqrt{x^2 - 1}\} \quad (1 < x < \infty),$$

那么有如下的 **Laplace** 公式:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta)^n d\theta.$$

证明. (i) 我们取  $f(\zeta) = \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{2^n}$ , 则

$$RHS = (f(z))^{(n)} \frac{2\pi i}{n!} \frac{1}{2\pi i} = P_n(z)$$

(ii) 注意到积分关于  $\theta$  为偶函数且周期为  $2\pi$ . 作  $\zeta = x + \sqrt{x^2 - 1}e^{i\theta}$ ,  $\theta \in (0, 2\pi)$

$$LHS = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2^n} \frac{(\sqrt{x^2 - 1}(1 + e^{2i\theta}) + 2xe^{i\theta})^n}{e^{in\theta}} d\theta = RHS$$

□

5. 设  $f \in H(B(0, 1)) \cap C(\overline{B(0, 1)})$ . 证明:

$$(i) \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 2f(0) + f'(0) \quad (ii) \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 2f(0) - f'(0).$$

提示: 分别计算积分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \left(2 + \zeta + \frac{1}{\zeta}\right) f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

和

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \left(2 - \zeta - \frac{1}{\zeta}\right) f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

即可.

证明. (i) 作  $\zeta = e^{i\theta}$ , 且由Cauchy积分公式

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} f(\zeta) d\zeta = 0, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta = f(0), \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta = f'(z) \Big|_{z=0} = f'(0)$$

则提示中  $(2 + 2\cos\theta = 4\cos^2\frac{\theta}{2})$

$$LHS = 2f(0) + f'(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})(2 + \cos\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = RHS$$

(ii): 完全同(i), 利用  $2 - 2\cos\theta = 4\sin^2\frac{\theta}{2}$ , 即可.  $\square$

6. 利用上题结果证明: 设  $f \in H(B(0, 1)) \cap C(\overline{B(0, 1)})$ , 且  $f(0) = 1, \operatorname{Re} f(z) \geq 0$ , 那么

$$-2 \leq \operatorname{Re} f'(0) \leq 2.$$

证明. 注意复数域上没有积分中值定理.

$$1 = f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta$$

利用上一题我们有

$$f'(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos\theta d\theta$$

而  $f(e^{i\theta})$  形如  $u + iv$  形式 ( $u, v \in \mathbb{R}$ ), 提出  $i$ , 取  $\operatorname{Re}$  并利用  $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$  不变号. 我们有

$$\operatorname{Re} f'(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{i\theta}) \cos\theta d\theta = \frac{\cos\xi}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{i\theta}) d\theta$$

则

$$|\operatorname{Re} f'(0)| \leq \left| \frac{\cos\xi}{\pi} \right| \int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} f(e^{i\theta})| d\theta \leq \left| \frac{\cos\xi}{\pi} \right| \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta = |2\cos\xi| \leq 2 \quad \square$$

注 3.4.1. 一般性的讨论见[1]P<sub>202</sub>, 12.5, 或者见[4]P<sub>103</sub>的第17题.

7. 设 $f$ 在角状域 $G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$ 中全纯, 在 $\overline{G}$ 上连续. 如果 $f$ 在正实轴的区间 $[a, b]$ 上等于零, 证明:  $f$ 在 $G$ 中恒等于零.

证明. 参考([12]P<sub>48</sub>, 定理4.8) 注意到角状域连通. 直接证明以下定理:

**定理 3.4.1.** 若 $f$ 在区域 $\Omega$ 全纯, 且存在 $\Omega$ 内某个数列, 其极限点也在 $\Omega$ 内, 使 $f$ 在数列上恒取0, 则 $f$ 必为0函数.

下面来证明这个结论

证明. 设 $z_0 \in \Omega$ , 是 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限点, 且 $f(w_n) = 0$ , 取 $B(z_0, \delta_0) \subset \Omega$ , 在其中考虑幂级数展开

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

如果 $f$ 在 $B(z_0, \delta_0)$ 上不恒为0, 则 $\exists a_m \neq 0$ , 即 $f$ 形如

$$f(z) = a_m (z - z_0)^m (1 + g(z - z_0)), \quad \lim_{z \rightarrow z_0} g(z - z_0) = 0$$

取 $z = w_k \rightarrow z_0$ , 则

$$f(w_k) = a_m (w_k - z_0)^m (1 + g(w_k - z_0)) \neq 0$$

矛盾! 接下来定义

$$U = \{z | f(z) = 0, z \in \Omega\}^\circ$$

由条件必有 $w_n \in U$ , 即 $U \neq \emptyset$ 且显然为开集。

取 $\forall z_n \in U, z_n \rightarrow z_1$  利用 $f \in H(\Omega)$ , 且 $f(z) \equiv 0, z \in B(z_1, \delta_1)$ 立得

$$z_1 \in U$$

于是 $U \subset \Omega$ 为闭集。而 $\Omega$ 连通, 利用1.5节的第十题可知 $U = \Omega$ 或 $U = \emptyset$  而 $U$ 不空, 即 $U = \Omega$ , 说明 $f \equiv 0, z \in \Omega$ , 证毕。□

取数列为 $[a_k, b_k] \subset \overline{G}, \{a_k\}_{k=1}^{+\infty}, \{b_k\}_{k=1}^{+\infty}$ , 显然极限点列在 $\overline{G}$ 内且 $f$ 在数列上恒取0. 于是满足结论所有条件, 即 $f$ 在 $G$ 中恒等于零, 证毕。□

8. (Schwarz积分公式) 设 $f \in H(B(0, R)) \cap C(\overline{B(0, R)})$ ,  $f = u + iv$ . 证明:  $f$ 可用实部表示为

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} u(Re^{i\theta}) d\theta + iv(0).$$

证明. ([4]P<sub>195</sub>)作 $z$ 的反演 $\frac{R^2}{\bar{z}}$ ,利用Cauchy积分公式和定理. 易知此时有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad 0 = \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \frac{R^2}{\bar{z}}} d\zeta$$

注意到

$$\frac{\bar{z}}{\bar{z}\zeta - R^2} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}\zeta - \zeta\bar{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{\zeta}}$$

于是二式等价于

$$0 = \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{\zeta}} d\zeta$$

作 $\zeta = Re^{i\theta}$ 换元有(形式上保留 $\zeta$ ,目的是统一 $d\theta$ )

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{\zeta \cdot f(\zeta)}{\zeta - z} d\theta, \quad 0 = \int_{|\zeta|=R} f(\zeta) \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} d\theta$$

二式取共轭再与一式相加我们有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=R} \left( \frac{\zeta \cdot f(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{\overline{z f(\zeta)}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \right) d\theta$$

利用 $f = u + iv$ , 则上式为

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} u(\zeta) d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_{|\zeta|=R} v(\zeta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} u(Re^{i\theta}) d\theta + iv(0)$$

即证。 □

**注 3.4.2.** 要是直接相减会发生什么情形呢?不妨试一试, 即

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} f(\zeta) \left( \frac{1}{\zeta - z} - \frac{\bar{z}}{\bar{z}\zeta - R^2} \right) d\zeta$$

于是

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \left( \frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \right) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \left( \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \right) d\zeta$$

观察到

$$\frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \operatorname{Re} \left( \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right)$$

于是再次作 $\zeta = Re^{i\theta}$ 换元,我们有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta) \operatorname{Re} \left( \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right) d\theta$$

如果不采用观察中代换, 设 $z = re^{i\varphi}$ , 利用余弦定理(几何意义, 请读者自己画图), 有

$$\frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)}$$

在等式两边同时取实部, 就得到了

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)} d\theta$$

于是我们完成了[12]上 $P_{46}$ 的习题11, 12(b)的证明。(也即著名的**Poisson**积分公式)

9. 设 $f \in H(B(0, R)) \cap C(\overline{B(0, R)})$ ,  $f = u + iv$ , 则对任意 $0 < r \leq R$ , 有

$$f'(0) = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) e^{-i\theta} d\theta.$$

证明. 利用第八题, 直接求导有

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \frac{2re^{i\theta}}{(re^{i\theta} - z)^2} d\theta$$

代入 $z = 0$ , 即证明。 □

### 3.5 Cauchy积分公式的一些重要推论

1. 设 $f$ 是有界整函数,  $z_1, z_2$ 是 $B(0, r)$ 中任意两点. 证明:

$$\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} dz = 0.$$

并由此得出Liouville定理.

证明. 由例3.1.4

$$LHS \leq \sup_{|z|=r} f(z) \int_{|z|=r} \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} dz = 0$$

而积分值可化为

$$\frac{1}{z_1 - z_2} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z - z_1} - \frac{f(z)}{z - z_2} dz = 0$$

由Cauchy积分公式等价于

$$\forall z_1 \neq z_2, z_1, z_2 \in B(0, r), \quad f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow f(z) \equiv C$$

即证明了Liouville定理. □

2. 设 $f$ 是整函数, 如果当 $z \rightarrow \infty$ 时,  $f(z) = O(|z|^\alpha), \alpha \geq 0$ , 证明 $f$ 是次数不超过 $[\alpha]$ 的多项式.

证明. 参考[10]利用习题3.3节第3题, 只需要证明

$$f^{([\alpha]+1)}(z) \equiv 0$$

而由题意

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{|z|^\alpha} \leq C$$

利用

$$[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$$

则

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{|z|^{[\alpha]+1}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{|z|^\alpha} \frac{|z|^\alpha}{|z|^{[\alpha]+1}} \leq C \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{|z|^\alpha}{|z|^{[\alpha]+1}} = 0$$

对 $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, |z| > r$ 时, 有

$$|f(z)| < \varepsilon |z|^{[\alpha]+1}$$

再取充分大以 $z$ 为圆心的 $|\zeta| = R$ 圆周, 且包含住 $|z| = r$ , 则此时

$$|\zeta| = R > |z| = r$$

于是

$$|f(\zeta)| < \varepsilon |\zeta|^{[\alpha]+1} \leq \varepsilon (|z| + R)^{[\alpha]+1}$$

利用Cauchy不等式我们有

$$|f^{([\alpha]+1)}(z)| \leq \frac{([\alpha]+1)!}{R^{[\alpha]+1}} \varepsilon (|z| + R)^{[\alpha]+1} \leq ([\alpha]+1)! 2^{[\alpha]+1} \varepsilon$$

由 $\varepsilon$ 的任意性即证明。

另一种形式: 令 $n := [\alpha] + 1$

$$|f^{(n)}(z)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta-z|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{|\zeta-z|=R} \frac{C|\zeta|^\alpha}{R^{n+1}} |d\zeta| \leq n! C \frac{(R+|z|)^\alpha}{R^n} \rightarrow 0 \quad \square$$

3. 设 $f$ 是域 $D$ 上的连续函数, 如果对于任意边界和内部都位于 $D$ 中的三角形域 $\Delta$ , 总有

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$$

那么 $f$ 是 $D$ 上的全纯函数。

证明. 由Morera定理和Goursat证明的三角形逼近可知成立。 □

4. 设 $f$ 是整函数, 如果

$$f(\mathbb{C}) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\},$$

证明 $f$ 是一个常值函数。

证明. 参考([9]P<sub>131</sub>) 设 $U = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ , 则 $f$ 把 $\mathbb{C}$ 至多映到无界域 $U$ . 若 $c_1 \in \mathbb{C} \setminus U$ 且为内点. 作 $w_1 = w - c_1$ , 则 $\{w_1 = 0\} \in (f(\mathbb{C}) - c_1)^c$ . 再作 $w_2 = \frac{1}{w - c_1}$ , 则映到有界域, 即 $w_2$ 为常数, 倒推即证明。 □

注 3.5.1. 利用Picard小定理, 显然, 这里仅给出定理, 略去证明。

定理 3.5.1 (Picard小定理). 若整函数 $f(z)$ 不取两个复值 $a, b (a \neq b)$ , 则 $f(z)$ 为一常数。

定理 3.5.2 (Picard大定理). 全纯函数 $f(z)$ 在其本性奇点的空心邻域内将无穷多次取任意有穷复值, 至多只有一个例外值。

5. 设 $f$ 是整函数, 如果

$$f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus [0, 1],$$

证明 $f$ 是一个常值函数.

证明. 参考([9]P<sub>132</sub>)通过作 $w_1 = \frac{w}{w-1}$ 映到 $\{\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]\}$ . 再作 $w_2 = \sqrt{w_1}$ , 映到右半平面, 最后作 $w_3 = \frac{w_2-1}{w_2+1}$  (Cayley变换)把右半平面映到单位圆. 由Liouville定理,  $w_3$ 为常数, 倒推即证明.  $\square$

注 3.5.2. 利用Picard小定理, 显然。

6. 设 $f$ 在域 $D$ 上全纯,  $z_0 \in D$ , 定义

$$F(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & z \in D \setminus \{z_0\}; \\ f'(z_0), & z = z_0. \end{cases}$$

证明:  $F \in H(D)$ .

证明. 当 $z = z_0$ 时, 显然 $F(z_0) = f'(z_0)$ 在域 $D$ 上全纯.

而 $F(z)$ 显然连续, 由Morera定理, 只需要证明

$$\forall \gamma \subset D, \int_{\gamma} F(z) dz = 0$$

如果此时 $\gamma$ 绕住了 $z_0$ , 则

$$\int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 2\pi i f'(z_0) - f(z_0) \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 0$$

如果此时 $\gamma$ 没有绕住 $z_0$ , 显然积分值为0, 即证明.  $\square$

7. 设 $\gamma$ 是可求长曲线,  $f$ 在域 $D$ 上连续, 在 $D \setminus \gamma$ 上全纯. 证明:  $f$ 在 $D$ 上全纯.

证明. 取 $D$ 中的简单闭曲线 $\gamma_0$ , 则分为三种情况

1.  $\gamma_0$ 在 $\gamma$ 外部, 此时显然沿着 $\gamma_0$ 的积分值为0.

2. 若 $\gamma$ 在 $\gamma_0$ 的内部, 延长 $\gamma$ , 交 $\gamma_0$ 于 $A, B$ 两点. 把 $\gamma_0$ 分别分为 $\gamma_1, \gamma_2$ , 并不妨设 $\gamma$ 的方向沿着 $\overrightarrow{BA}$ 的方向, 则

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1 + \overrightarrow{BA} + \gamma} f(z) dz + \int_{\gamma_2 + \overrightarrow{AB} - \gamma} f(z) dz = 0$$

3. 如果 $\gamma$ 与 $\gamma_0$ 相交, 不妨记为 $A, B$ 类似上一情况。

综上, 由Morera定理, 即证明。  $\square$

**注 3.5.3.** 可以把命题推广到一般性的结论, 即有 $n$ 条可求长曲线的情形。参考本书 $P_{248}$  **Painlevé原理**。

8. 设 $f$ 是域 $D$ 上的连续函数, 如果对于任意边界和内部都位于 $D$ 中的弓形域 $G$ , 总有  $\int_{\partial G} f(z) dz = 0$ , 那么 $f$ 是 $D$ 上的全纯函数. 如果把弓形域换成圆盘, 结论是否仍然成立?

证明. 设  $\Delta \subset D$  为任意三角形, 顶点  $A, B, C$ 。向外构造三个弓形域(内部同理)

$$1. G_{AB}: \overline{AB} + \widehat{BA}$$

$$2. G_{BC}: \overline{BC} + \widehat{CB}$$

$$3. G_{CA}: \overline{CA} + \widehat{AC}$$

设它们的弧所构成的曲线为 $\partial G$ , 即

$$\partial G = \widehat{BA} \cup \widehat{CB} \cup \widehat{AC}$$

由条件

$$\sum_{k=AB, BC, CA} \int_{\partial G_k} f(z) dz = 0$$

展开

$$\left( \int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BC}} + \int_{\overline{CA}} \right) + \left( \int_{\widehat{BA}} + \int_{\widehat{CB}} + \int_{\widehat{AC}} \right) = 0$$

即:

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz + \int_{\partial G} f(z) dz = 0$$

这等价为

$$2 \int_{\partial \Delta} f(z) dz = \int_{\partial \Delta} f(z) dz - \int_{\partial G} f(z) dz$$

取 $M = \max_{z \in G} |f(z)|$ , 注意到当弓形域半径充分大时

$$\Delta \ell = \ell(\partial G) - \ell(\partial \Delta) < \frac{\varepsilon}{M}$$

则

$$\left| \int_{\partial \Delta} f(z) dz - \int_{\partial G} f(z) dz \right| \leq M \cdot \Delta \ell < \varepsilon$$

立得

$$\left| \int_{\partial\Delta} f dz \right| < \varepsilon$$

由 $\varepsilon$ 任意性和Morera定理,  $f$  全纯。

当把弓形域换成圆盘时, 结论不再成立。考虑函数  $f(z) = \operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2$ , 其中  $z = x + iy$ 。该函数在 $\mathbb{C}$ 上连续, 但不是全纯。因为不恒满足

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

对任意圆盘  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$

$$\int_{\partial G} f(z) dz = \int_{|z-a|=R} \operatorname{Re}(z^2) dz$$

令  $w = z - a$ , 化为

$$\int_{|w|=R} \operatorname{Re}((a+w)^2) dw = \int_{|w|=R} \operatorname{Re}(a^2 + 2aw + w^2) dw$$

注意到

$$\int_{|w|=R} dw = 0, \quad \int_{|w|=R} w dw = 0$$

所以我们不妨设  $a = 0$ 。令  $w = Re^{i\theta}$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{iR^3} \int_{|w|=R} \operatorname{Re}(w^2) dw &= \int_0^{2\pi} \cos 2\theta \cdot e^{i\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos 2\theta \cos \theta d\theta + i \int_0^{2\pi} \cos 2\theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos 3\theta + \cos \theta) d\theta + \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} (\sin 3\theta - \sin \theta) d\theta = 0 \end{aligned}$$

故积分为零。综上,  $\int_{\partial G} f(z) dz = 0$  对所有圆盘成立, 但  $f(z) = x^2 - y^2$  不是全纯函数。□

**注 3.5.4.** 直观上看, 弓形域的弦和三角形的边有类似的性质。

Morera定理中条件为任意简单闭曲线, 而简单闭曲线可以利用折线一致逼近, 由Goursat证明的三角形逼近。似乎只需要证明弓形域和圆盘可以一致逼近一个三角形即可, 而这是错误的。因为这两种图形都可以做到, 下面简要说明构造过程:

设三角形为 $T$ 。构造方法如下: 对于弓形域, 取三角形的一条边, 做出在内部的最大弓形域(两端切线), 同时作其中心弦所对应的直线, 依次下去, 两边的空隙部分通过不断作圆弧边的切线继续递推。对于圆盘, 构造方法与弓形域类似, 不断填充小圆盘即可。下面给出了一种构造圆盘的方法。

1. 在三角形内部取可数稠密点集  $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$
2. 设  $d_i = d(q_i, \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j)$ ,  $\delta_i = d(q_i, \partial T)$
3. 取半径  $r_i < \min\left(\frac{d_i}{2}, \frac{\delta_i}{2}, \frac{1}{i}\right)$
4. 定义闭圆盘  $B_i = \overline{B}(q_i, r_i)$

此时满足

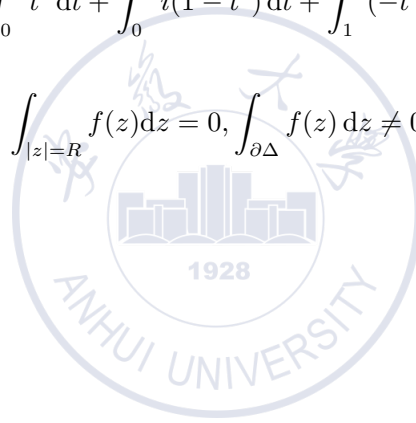
$$\forall i \neq j, B_i \cap B_j = \emptyset. \quad \forall p \in T, \forall \varepsilon > 0. \exists B_i \text{ s.t. } d(p, B_i) < \varepsilon$$

尽管弓形域和闭圆盘能很好的逼近三角形，但是我们需要证明的是函数在任意的三角形域上积分为0，这个要求更强一点。因此圆盘边界积分为0~~不~~所有三角形积分为0。这只需要对反例的函数考虑顶点为  $0, 1, i$  的三角形域即可

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 i(1-t^2) dt + \int_1^0 (-t^2)i dt = \frac{1}{3} + i \neq 0$$

从而

$$\int_{|z|=R} f(z) dz = 0, \quad \int_{\partial \Delta} f(z) dz \neq 0$$



### 3.6 非齐次Cauchy积分公式

1. 设 $D$ 是由有限条可求长简单闭曲线围成的域,  $f \in C^1(\overline{D})$ . 证明:

$$(i) \iint_D \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta = \int_{\partial D} f(\zeta) d\zeta;$$

$$(ii) \iint_D \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \int_{\partial D} f(\zeta) d\bar{\zeta}.$$

证明. (i): 利用

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega \quad d = \partial + \bar{\partial}$$

取 $\omega = f(\zeta)d\zeta$ 即

$$RHS = \int_D \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta} d\zeta \wedge d\zeta + \int_D \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta = LHS$$

(ii): 同(i), 取 $\omega = f(\zeta)d\bar{\zeta}$ 即证明。 □

2. 设 $D$ 是由有限条可求长简单闭曲线围成的域,  $f, g \in C^1(\overline{D})$ . 证明 (Green公式):

$$\iint_D \left( \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \right) d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \int_{\partial D} (f(\zeta)d\zeta + g(\zeta)d\bar{\zeta}).$$

证明. 利用第一题, 把(ii)中的 $f$ 用 $g$ 替代, 两者相加, 且注意到

$$d\bar{\zeta} \wedge d\zeta = -d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

即证。 □

3. 设 $D$ 是由有限条光滑简单闭曲线围成的域,  $\mathbf{n}$ 是 $\partial D$ 的单位法向量场, 指向 $D$ 的外部,  $u, v \in C^2(\overline{D})$ . 证明:

(i)

$$\iint_D u(z) \Delta v(z) dx dy + \iint_D \left( \frac{\partial u(z)}{\partial x} \frac{\partial v(z)}{\partial x} + \frac{\partial u(z)}{\partial y} \frac{\partial v(z)}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} u(z) \frac{\partial v(z)}{\partial \mathbf{n}} |dz|$$

(ii)

$$\iint_D (u(z) \Delta v(z) - v(z) \Delta u(z)) dx dy = \int_{\partial D} \left( u(z) \frac{\partial v(z)}{\partial \mathbf{n}} - v(z) \frac{\partial u(z)}{\partial \mathbf{n}} \right) |dz|.$$

证明. (PS: 作者自己算了半天出来的, 超开心!)

我们注意到(i)中交换 $u(z), v(z)$ 的顺序, 再与(i)相减即证(ii). 只需证明(i), 下面来证明(i)成立。

(i): 注意到  $\forall z$ , 曲线有参数形式  $z(t)$ , 从而设  $\alpha = \arg z'(t)$ . 由几何意义,  $|dz|$  代表小弧长, 很小时可视为小直线。于是我们有(类似斜率)

$$dx = |dz| \cos \alpha, dy = |dz| \sin \alpha$$

而利用  $\mathbf{n}$  是  $\partial D$  指向  $D$  的外部的单位法向量场。可知作切线必有沿着  $D$  的逆时针方向(取定正向)。设  $\beta$  为其单位法向量, 注意到  $D$  在平面上。于是我们有(请自己作图, 或者参考[5]  $P_{315}$  的 24.2.2 节)

$$\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

利用数学分析关于方向导数的知识我们有

$$\frac{\partial v(z)}{\partial \mathbf{n}} = \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot (\cos \beta, \sin \beta) = \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot (\sin \alpha, -\cos \alpha)$$

则

$$\begin{aligned} RHS &= \int_{\partial D} u(z) \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot (\sin \alpha, -\cos \alpha) \frac{dx}{\cos \alpha} \\ &= \int_{\partial D} u(z) \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot (\tan \alpha dx, -dx) \\ &= \int_{\partial D} u(z) \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot (dy, -dx) \\ &= \int_{\partial D} u(z) \left( \frac{\partial v}{\partial x} dy - \frac{\partial v}{\partial y} dx \right) \\ &:= \int_{\partial D} \omega \end{aligned}$$

利用(读者自证不难)

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

于是

$$\begin{aligned} d\omega &= d \left( u(z) \left( \frac{\partial v}{\partial x} dy - \frac{\partial v}{\partial y} dx \right) \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot u dx \wedge dy - \left( \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \cdot u dy \wedge dx \right) \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \wedge dy + u \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
 LHS &= \int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega \\
 &= \int_D u(z) \Delta v(z) + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \\
 &= RHS
 \end{aligned}$$

即证明! □

注 3.6.1. 关于  $\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial u}{\partial \tau}$  的讨论可参考 [4]P<sub>188</sub>.

4. 设  $D$  是由有限条可求长简单闭曲线围成的域,  $f$  在  $\overline{D}$  上全纯,  $z \in D$ . 证明:

$$\iint_D \frac{f'(\zeta)}{\zeta - \bar{z}} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \int_{\partial D} \left( \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{f(\zeta)}{\zeta - \bar{z}} d\bar{\zeta} \right).$$

证明. 类似第一题, 我们取

$$\omega = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{f(\zeta)}{\zeta - \bar{z}} d\bar{\zeta}$$

利用  $f$  在  $\overline{D}$  全纯, 有

$$\frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} = 0, \quad \frac{\partial \left( \frac{f(\zeta)}{\zeta - \bar{z}} \right)}{\partial \zeta} = \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta} \frac{1}{\zeta - \bar{z}}, \quad \frac{\partial \left( \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right)}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z}$$

则我们有

$$\begin{aligned}
 d\omega &= d \left( \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{f(\zeta)}{\zeta - \bar{z}} d\bar{\zeta} \right) \\
 &= \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta} \frac{1}{\zeta - \bar{z}} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} + \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta \\
 &= \frac{f'(\zeta)}{\zeta - \bar{z}} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}
 \end{aligned}$$

即

$$RHS = \int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega = \int_D \frac{f'(\zeta)}{\zeta - \bar{z}} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = LHS$$

即证。 □

### 3.7 一维 $\bar{\partial}$ 问题的解

1. 设 $D$ 是域,  $K \subset D$ 是紧集. 证明: 存在开集 $G$ 和函数 $\varphi \in C^\infty(D)$ , 满足:

- (i)  $K \subset G \subset \bar{G} \subset D$ ; (ii)  $0 \leq \varphi(z) \leq 1, \forall z \in D$ ;
- (iii)  $\varphi(z) = 1, \forall z \in G$ ; (iv)  $\text{supp } \varphi \subset D$ .

证明. 我们不加证明的给出以下定理, 详细证明参看[9] $P_{70}$ , 相关的知识也可阅读[7] $P_{170} \sim P_{173}$ 或[13] $P_{200}$ .

**定义 3.7.1.** 若 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 为一开集, 所有在 $\mathbb{C}$ 上属于 $C^\infty$ , 且其紧致支集在 $\Omega$ 中的实函数全体组成的空间记为 $\mathcal{D}(\Omega)$ .

**定理 3.7.1.** 若 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 为一开集,  $\mathcal{B}$ 为 $\Omega$ 的一组开集基, 则在 $\mathcal{B}$ 中存在一个序列 $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ , 使得

- 1.  $\bigcup_{j \geq 1} U_j = \Omega$ ;
- 2. 对 $\Omega$ 中任一紧集 $K$ , 只与 $\{U_j\}_{j \geq 1}$ 中有限个相交。如果一个集合列具有性质(i), 称为 $\Omega$ 的开覆盖。如果还具有性质(ii), 称开覆盖为局部有限的。

**定理 3.7.2 (单位分解定理).** 若 $\Omega$ 为 $\mathbb{C}$ 中的一个非空开子集,  $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ 为 $\Omega$ 的一个开覆盖。  $I$ 为一个非负整数集合。则在 $\mathcal{D}(\Omega)$ 中存在序列 $\alpha_1(z), \alpha_2(z), \dots, \alpha_n(z), \dots$ , 使得

- 1. 对每一个 $j \geq 1$ , 有对应的 $i = i(j) \in I$ , 使得 $\text{supp } \alpha_i \subseteq \Omega_i$ , 且集合 $\{\text{supp } \gamma_i\}_{j \geq 1}$ 为局部有限的;
- 2. 对每一个 $j \geq 1, 0 \leq \alpha_j \leq 1$ ;
- 3. 对每一个 $z \in \Omega$ , 有 $\sum_{j \geq 1} \alpha_j(z) = 1$ 。

我们称序列 $\{\alpha_j(z)\}_{j \geq 1}$ 为从属于覆盖于 $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ 的 $C^\infty$ 单位分解。

利用单位分解定理可以证明以下结论:

**定理 3.7.3.** 若 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 为一开集,  $K$ 为 $\Omega$ 中的一个紧致子集,  $V$ 为 $K$ 的一个开邻域,  $V \subseteq \Omega$ , 则存在 $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ , 使得

- 1.  $0 \leq \varphi \leq 1$ ;
- 2. 在 $K$ 的一个邻域上,  $\varphi \equiv 1$ .

取 $G = V$ , 易知道满足题目所有条件, 证毕。 □

2. 设 $D$ 是域,  $f \in C^\infty(D)$ . 证明: 若 $u_0 \in C^\infty(D)$ 是非齐次 $\bar{\partial}$ 方程的解, 即 $\frac{\partial u_0}{\partial \bar{z}} = f$ , 则该方程的解的全体为 $u_0 + H(D)$ .

证明. 设解的全体为 $u_0 + g(z)$ , 则

$$f = \frac{\partial(u_0 + g(z))}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u_0}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g(z)}{\partial \bar{z}} = f + \frac{\partial g(z)}{\partial \bar{z}}$$

于是由Cauchy-Riemann方程,  $g(z)$ 为 $D$ 上的任意全纯函数, 于是解的全体为 $u_0 + H(D)$ .  $\square$

3. 设 $D$ 是域,  $a \in D, B(a, R) \subset D, f$ 在 $B(a, R) \setminus \{a\}$ 上全纯. 证明: 存在 $D \setminus \{a\}$ 上的全纯函数 $F$ , 使得 $\lim_{z \rightarrow a} [F(z) - f(z)] = 0$ , 因此 $F - f \in H(B(a, R))$ .

证明. 考虑  $f$  在  $a$  处的 Laurent 级数展开:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < R.$$

记其主部为  $P(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$ . 则函数

$$g(z) = f(z) - P(z)$$

在  $B(a, R)$  上全纯 (在  $a$  处有可去奇点).

由 Mittag-Leffler 定理, 存在  $D$  上的亚纯函数  $F_0$ , 满足:

- $F_0$  在  $a$  处有主部  $P(z)$
- $F_0$  在  $D \setminus \{a\}$  上全纯

在  $B(a, R) \setminus \{a\}$  上定义函数

$$h(z) = f(z) - F_0(z).$$

由于  $f$  和  $F_0$  在  $a$  处有相同主部,  $h(z)$  在  $B(a, R)$  上全纯. 记  $h(a) = \lim_{z \rightarrow a} h(z)$ .

定义

$$F(z) = F_0(z) + h(a).$$

则  $F$  在  $D \setminus \{a\}$  上全纯, 且

$$F(z) - f(z) = [F_0(z) + h(a)] - f(z) = h(a) - [f(z) - F_0(z)] = h(a) - h(z).$$

因此

$$\lim_{z \rightarrow a} [F(z) - f(z)] = \lim_{z \rightarrow a} [h(a) - h(z)] = h(a) - h(a) = 0,$$

且  $F - f = h(a) - h(z) \in H(B(a, R))$ .  $\square$

4. 举例说明, 存在  $f \in C^\infty(\mathbb{C})$ ,  $\text{supp } f$  是紧集, 但非齐次  $\bar{\partial}$  方程  $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$  的任意解没有紧支集.

证明. 考虑磨光函数:

$$f(z) = \begin{cases} ce^{-\frac{1}{1-|z|^2}} & \text{若 } |z| < 1, \\ 0 & \text{若 } |z| \geq 1, \end{cases}$$

其中常数  $c > 0$  使得  $\int_{\mathbb{C}} f \, dx \, dy = 1$ . 显然  $f \in C^\infty(\mathbb{C})$  且  $\text{supp } f = \overline{B(0, 1)}$  为紧集.

假设存在解  $u \in C^\infty(\mathbb{C})$  满足  $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$  且  $u$  有紧支集. 考虑微分形式  $\omega = u \, dz$ , 则

$$d\omega = d(u \, dz) = \left( \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \wedge dz = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = f d\bar{z} \wedge dz.$$

由  $d\bar{z} \wedge dz = -dz \wedge d\bar{z} = -(-2i \, dx \wedge dy) = 2i \, dx \wedge dy$ , 得

$$d\omega = 2if \, dx \wedge dy.$$

由 Stokes 定理 ( $u$  紧支集):

$$\int_{\mathbb{C}} d\omega = \int_{\partial \mathbb{C}} \omega = 0,$$

故

$$\int_{\mathbb{C}} 2if \, dx \wedge dy = 0 \implies \int_{\mathbb{C}} f \, dx \, dy = 0.$$

但这与  $\int_{\mathbb{C}} f \, dx \, dy = 1 \neq 0$  矛盾.

因此不存在具有紧支集的解  $u$ . 解的存在性由积分表达式

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} dA(\zeta)$$

保证, 但无紧支集解. □

注 3.7.1. 更多的知识参看 [13]P<sub>207</sub> 中定理 4.7.4. 下面介绍

定义 3.7.2 (磨光函数). 对  $x \in \mathbb{R}^n$ , 定义

$$\chi(x) = \begin{cases} ce^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \quad \chi_\delta(x) = \frac{1}{\delta} \chi\left(\frac{x}{\delta}\right), \quad \delta > 0.$$

其中

$$\frac{1}{c} = \int_{|x| < 1} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} dx$$

我们有以下性质

1.  $\chi(x)$  为非负偶函数.
2.  $\chi(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$
3.  $\forall |x| \geq 1, k \in \mathbb{N}, \quad \chi^{(k)}(x) = 0$
4.  $\int_{\mathbb{R}^n} \chi(x) dx = 1.$

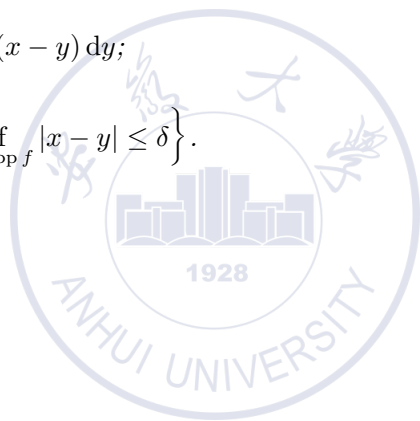
如果限制在 $\mathbb{R}$ 上, 设 $f$ 在紧集上可积, 定义

$$f_\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \chi_\delta(x-y) dy.$$

不难发现有以下结果

1.  $f_\delta \in C^\infty(\mathbb{R});$
2.  $\int_{\mathbb{R}} f_\delta(x) dx = 1$
3.  $f_\delta^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \chi_\delta^{(n)}(x-y) dy;$
4.  $\text{supp } f_\delta \subset \left\{ x \in \mathbb{R} : \inf_{y \in \text{supp } f} |x-y| \leq \delta \right\}.$

证明略去, 验证定义即可。



## 第4章 全纯函数的Taylor展开及其应用

### 4.1 Weierstrass定理

1. 证明: 复数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  收敛, 当且仅当  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$  同时收敛.

证明.  $\Rightarrow$ : 收敛则分别取  $\operatorname{Re}$  和  $\operatorname{Im}$  即证.

$\Leftarrow$ : 由

$$|z_{n+p} + \cdots + z_n| \leq |x_{n+p} \cdots + x_n| + |y_{n+p} \cdots + y_n|$$

和Cauchy收敛原理即证. □

注 4.1.1. 另解: 或者利用习题1.1节的第三题的推广即可。

2. 证明: 若  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  满足条件

(i)  $\left\{ \sum_{k=1}^n a_k \right\}$  有界; (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ;

(iii)  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}| < \infty$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛, 并验证这是Dirichlet判别法和Abel判别法的推广.

证明. 利用Abel变换, 记  $S_n$  为  $a_n$  前  $n$  项和。则

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) S_k + S_n b_n$$

令  $n \rightarrow +\infty$  利用  $|S_n| < M$ , 取  $|b_n| < \frac{\varepsilon}{M}$  则

$$\sum_{k=1}^{n-1} |(b_k - b_{k+1}) S_k| + |S_n b_n| < M \sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}| + M \frac{\varepsilon}{M} < \infty$$

Dirichlet判别法条件: 如果其中一个数列部分和总是有界的 ( $|S_n| \leq M$ ), 且另一个数列单调递减趋于0 ( $b_n \searrow 0$ )。我们取对应括号中的数列, 则(iii)为

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}| = b_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b_1 < \infty$$

**Abel判别法条件:**一个数列单调有界( $|a_n| \leq M$ ), 而另一个级数收敛( $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty$ )。利用单调有界原理, 设 $a_n$ 收敛于 $a$ 。则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n + \sum_{n=1}^{\infty} a b_n$$

则Abel判别法可用Dirichlet判别法推出, 即证。□

**注 4.1.2.** 更加详细的讨论可以参考[14]P<sub>87</sub>定理5。

3. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 是非空点集 $E$ 上的函数项级数。证明:

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 $E$ 上一致收敛, 当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} f_n(z)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} f_n(z)$ 都在 $E$ 上一致收敛。

证明. 当 $|z - z_0| < \delta$ 时,  $\Rightarrow$ : 取 $\operatorname{Re}$ 和 $\operatorname{Im}$ 显然。

$\Leftarrow$ : 设 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ , 利用

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |\operatorname{Re}(f(z) - f(z_0))| + |\operatorname{Im}(f(z) - f(z_0))|$$

即证。□

4. 设 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $-\alpha \leq \arg z_n \leq \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$ . 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n, \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 具有相同的敛散性。

证明. 显然我们有 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ 收敛

只需证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛

设 $z_n = x_n + iy_n$ , 而 $y_n = x_n \tan \alpha_n$  (由几何意义). 则

$$|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = x_n \frac{1}{\cos \alpha_n} \leq \frac{x_n}{\cos \alpha}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n < +\infty$$

□

5. 设 $\operatorname{Re} z_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . 证明: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2$ 也收敛。

证明. 设  $z_n = x_n + iy_n$ , 显然此时  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$  收敛. 而  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$  收敛, 即  $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^2 - y_n^2), \sum_{n=1}^{\infty} 2x_n y_n$  收敛. 要证明题目, 只需证明  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2, \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$  均收敛.

注意到  $x_n > 0$ , 即为正项级数, 因为其收敛, 所以  $\exists N > 0$ , 使得  $\forall n > N, x_n^2 < x_n$ . 即

$$\sum_{n=N}^{\infty} x_n^2 < \sum_{n=N}^{\infty} x_n$$

而前有限项不改变收敛性, 即  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$  收敛, 利用

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (x_n^2 - y_n^2)$$

显然右侧两个级数收敛, 即  $LHS$  也收敛, 即证. □

6. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  是复数项级数, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = q$ . 证明:

(i) 若  $q < 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  绝对收敛; (ii) 若  $q > 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  发散.

证明. (i): 由上极限的定义我们有

$$q - \varepsilon < \sqrt[n]{|z_n|} < q + \varepsilon$$

我们取  $\varepsilon = \frac{1-q}{2} > 0$ , 则  $q + \varepsilon < 1$ , 即

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n| < \sum_{n=1}^{+\infty} (q + \varepsilon)^n < +\infty$$

(ii): 同(i), 取  $\varepsilon = \frac{q-1}{2} > 0$ , 则

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n| > \sum_{n=1}^{+\infty} (q - \varepsilon)^n = +\infty$$

□

7. 求下列函数项级数的收敛点集: (i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{n^2}$ ; (ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n}$ .

证明. (i): 当  $\operatorname{Im} z = 0$  时, 由 Dirichlet 判别法即收敛。

当  $\operatorname{Im} z \neq 0$  时, 注意到

$$\frac{\cos(nz)}{n^2} \geq \frac{\sqrt{\cosh^2(ny) - 1}}{n^2} \rightarrow \infty$$

综上级数在实轴上收敛。(ii):如果 $|z| \geq 1$ ,一般项不趋于0,不收敛。

当 $|z| < 1$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{\infty} (z^n)^k < \infty$$

□

注 4.1.3. 不难发现有以下等式

$$|\sin z|^2 = \sinh^2 y + \sin^2 x$$

$$|\cos z|^2 = \sinh^2 y + \cos^2 x$$

同时参考[2]P<sub>140</sub>, 我们有一个很有意思的等式, 证明留作习题。

练习 4.1.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^n}{1-z^n}, \quad \forall |z| < 1$$

提示:考虑二重级数展开反转求和。

8. 设 $z_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \forall n \in \mathbb{N}$ , 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = q$ . 证明:

(i) 若 $q < 1$ , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛; (ii) 若 $q > 1$ , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 可能收敛也可能发散。

证明. (i):类似第六题

$$q - \varepsilon < \frac{z_{n+1}}{z_n} < q + \varepsilon$$

则

$$z_1(q - \varepsilon)^n < z_{n+1} < z_1(q + \varepsilon)^n$$

取 $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$ 即可。

(ii):取 $z_n = q^n$ , 则级数发散。

再取分段级数

$$z_{2n-1} = \frac{1}{2^{n+1}}, z_{2n} = \frac{1}{2^n}$$

显然级数收敛, 但是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{2n}}{z_{2n-1}} \right| = 2 > 1$$

□

注 4.1.4. 此时不难发现如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = q < \infty$$

则类似第六题可证明发散。但是当极限不存在时可以收敛也可以发散。

9. (Raabe判别法) 设  $z_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \forall n \in \mathbb{N}$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = 1$ . 证明:

若  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \left( \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| - 1 \right) < -1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  绝对收敛.

证明. 设极限为  $q < -1$ , 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = 1 + \frac{q}{n}$$

类似以上, 即需要取

$$1 + \frac{q}{n} + \varepsilon < 1 \Leftrightarrow 0 < \varepsilon < \frac{-q}{n}$$

这是可以取到的  $\left( \varepsilon = \frac{-q}{2n} \right)$ , 即证。 □

10. 判别下列级数的敛散性:

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n}, \operatorname{Im} z > 0$ ;

(ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1) \beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{n! \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)}, \operatorname{Re}(\alpha+\beta-\gamma) < 0, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$

证明. (i): 设  $z = x + iy, y > 0$ , 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{e^{inx}}{n} + \frac{1}{ne^{ny}} \right)$$

其中

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ne^{ny}} < \infty$$

由Dirichlet判别法, 当  $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  时收敛。

(ii): 由

$$\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \left| \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(n+1)} \right|$$

直接暴力估计计算有。

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(n+1)} \right| - 1 &= \sqrt{\frac{(\alpha+n)(\beta+n)(\bar{\alpha}+n)(\bar{\beta}+n)}{(\gamma+n)(n+1)^2(\bar{\gamma}+n)}} - 1 \\
 &= \sqrt{\frac{(|\alpha|^2 + 2n \operatorname{Re} \alpha + n^2)(|\beta|^2 + 2n \operatorname{Re} \beta + n^2)}{(n+1)^2(|\gamma|^2 + 2n \operatorname{Re} \gamma + n^2)}} - 1 \\
 &= \sqrt{1 + \frac{A}{(n+1)^2(|\gamma|^2 + 2n \operatorname{Re} \gamma + n^2)}} - 1 \\
 &\approx \frac{A}{2(n+1)^2(|\gamma|^2 + 2n \operatorname{Re} \gamma + n^2)} \\
 &:= \frac{A}{2B}
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 A &:= |\alpha|^2 |\beta|^2 \\
 &\quad + n \left( 2|\beta|^2 \operatorname{Re} \alpha + 2|\alpha|^2 \operatorname{Re} \beta - 2 \operatorname{Re} \gamma - 2|\gamma|^2 \right) \\
 &\quad + n^2 \left( |\alpha|^2 + 4 \operatorname{Re} \alpha \operatorname{Re} \beta + |\beta|^2 - 1 - |\gamma|^2 - 4 \operatorname{Re} \gamma \right) \\
 &\quad + n^3 \left( 2 \operatorname{Re} \alpha + 2 \operatorname{Re} \beta - 2 - 2 \operatorname{Re} \gamma \right) \\
 B &:= (n+1)^2 (|\gamma|^2 + 2n \operatorname{Re} \gamma + n^2)
 \end{aligned}$$

注意到  $\deg A = 3, \deg B = 4$ 。对于极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nA}{2B}$$

我们只需要考虑分母整体次数为4，分子A中次数为3即可。

不难看出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nA}{2B} = \frac{2 \operatorname{Re} \alpha + 2 \operatorname{Re} \beta - 2 - 2 \operatorname{Re} \gamma}{2 \cdot 1} = \operatorname{Re}(\alpha + \beta - \gamma) - 1 < -1$$

于是由Raabe判别法，级数一致收敛。 □

11. 证明：  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n-z}$  在  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$  上内闭一致收敛。

证明. 注意到级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

在任意的紧集上一致收敛。只需证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

在任意的紧集上一致收敛。对任意的紧集 $K$ , 存在 $R > 0$ , 使得

$$K \subset B(0, R)$$

而存在 $N$ , s.t.  $n > N > R \geq |z|$ , 此时

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left| (-1)^n \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{R}{n|z-n|} \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{R}{n(n-|z|)} \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{R}{n(n-R)} < \infty$$

由Cauchy收敛准则, 即证。  $\square$

12. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 是域 $D$ 上的全纯函数项级数. 证明: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} f_n(z)$ 在 $D$ 上内闭一致收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} f_n(z)$ 或者在 $D$ 上内闭一致收敛, 或者在 $D$ 上处处发散.

证明. 设和函数分别为 $f(z), u(z), v(z)$ , 其中 $f = u + iv$ . 如果此时 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} f_n(z)$ 在 $D$ 上处处发散.

显然成立, 如果至少有一个点使得 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} f_n(z)$ 在 $D$ 上收敛, 我们需要证明此时在任意的紧集 $K \subset D$ 上一致收敛. 注意到题目中给出了 $\operatorname{Re}$ , 我们考虑Schwarz积分公式, 通过平移变换我们不妨设 $\operatorname{Im} f_n(z) = v_n(z)$ 在 $z = 0$ 处收敛(因为此时 $\operatorname{Re} f_n(z) = u_n(z)$ 在 $K$ 上一致收敛). 我们有

$$\forall m, n > N, z \in B(0, \delta). \quad |u_m(z) - u_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |v_m(0) - v_n(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

于是此时

$$\begin{aligned} |v_m(z) - v_n(z)| &\leq |f_m(z) - f_n(z)| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} \left( u_m(Re^{i\theta}) - u_n(Re^{i\theta}) \right) d\theta + i v_m(0) - i v_n(0) \right| \\ &\leq \sup |u_m(z) - u_n(z)| \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta \right| + |v_m(0) - v_n(0)| \\ &\leq M \sup |u_m(z) - u_n(z)| + |v_m(0) - v_n(0)| \\ &< M \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

显然 $K$ 为紧集, 考虑利用1.6节习题4, 我们知道此时 $K$ 还是 $\varepsilon$ 连通的. 于是对于在 $K$ 中的任意两点都可以用有限个点连接, 最后由 $\varepsilon$ 的任意性和Cauchy收敛原理我们可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} f_n(z)$ 在 $D$ 上内闭一致收敛。  $\square$

注 4.1.5. 看似奇怪的1.6节习题竟然在此处派上了用场, 作者的习题编排可谓精妙。

13. 证明: 若域 $D$ 上的全纯函数列 $\{f_n(z)\}$ 在 $D$ 上内闭一致收敛于 $f(z)$ , 则 $f(z)$ 在 $D$ 上全纯, 并且 $\{f_n^{(k)}(z)\}$ 在 $D$ 上内闭一致收敛于 $f^{(k)}(z)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

证明. 注意到题目与本节定理4.1.9的区别是定理中的条件为求和号, 即考虑

$$g_n(z) = f_n(z) - f_{n-1}(z), \quad f_0(z) := 0$$

此时显然所有的 $g_n(z)$ 全纯, 否则矛盾。而

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N g_n(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(z) \Rightarrow f(z)$$

利用定理4.1.9.即证明。 □

14. 若 $\{\lambda_n\}$ 是严格单调增加, 并且以 $\infty$ 为极限的正数列, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ 为Dirichlet级数. 证明:

- (i) 若该级数在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处收敛, 则它在半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > x_0\}$ 上内闭一致收敛;
- (ii) 若该级数在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处绝对收敛, 则它在闭半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq x_0\}$ 上绝对一致收敛.

证明. (i): 在右侧半平面上给定一个紧集 $K$ , 显然 $D := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = x_0\}$ 为级数的一条收敛曲线, 而此时有

$$d(K, D) > 0$$

而 $K$ 紧, 于是总可以找到 $\operatorname{Re} z_0 > x_0$ 且闭角域 $A$ , 使得 $A \supset K$ , 利用4.1节第四题可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n, \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 有相同收敛性。于是此时级数在 $A$ 上一致收敛, 即在 $K$ 上一致收敛。

(ii):  $\forall z = x + iy \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq x_0\}$ , 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{e^{\lambda_n z}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{e^{\lambda_n z}} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{e^{\lambda_n x_0}} < \infty$$

□

## 4.2 幂级数

1. 设  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  和  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  的收敛半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ . 证明:

- (i)  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n$  的收敛半径  $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ ; (ii)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$  的收敛半径  $R \geq R_1 R_2$ ;  
 (iii)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n$  的收敛半径  $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ .

证明. (i): 我们易知对于  $R < \min\{R_1, R_2\}$ , 级数收敛, 则其收敛半径至少大于上述值。

(ii): 类似(i), 即证。

(iii): 利用Cauchy积

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

即证。 □

2. 求下列幂级数的收敛半径:

- (i)  $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ ; (ii)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} z^n$ ;  
 (iii)  $\sum_{n=0}^{\infty} [3 + (-1)^n]^n z^n$ ; (iv)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$ .

证明. (i):

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{z^{n!}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} z^{(n-1)!} < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$$

即收敛半径为1.

(ii): 显然

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n^2}}} = 0$$

收敛半径为 $\infty$ .

(iii):

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{[3 + (-1)^n]^n} = 4$$

则  $R = \frac{1}{4}$

(iv): 利用Stirling公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n \left( 1 + O\left( \frac{1}{n} \right) \right) \quad n \rightarrow \infty$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}} = e$$

于是其收敛半径为  $\frac{1}{e}$ . □

3. 证明: 若  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  在  $z_0 \neq 0$  处绝对收敛, 则它在  $\overline{B(0, |z_0|)}$  上绝对一致收敛.

证明. 显然

$$z \in \overline{B(0, |z_0|)} \Leftrightarrow |z| \leq |z_0|$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n \frac{z^n}{z_0^n} z_0^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z_0^n| < \infty$$

□

4. 设正数列  $\{a_n\}$  单调收敛于零. 证明:

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  的收敛半径  $R \geq 1$ ; (ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  在  $\partial B(0, R) \setminus \{R\}$  上处处收敛.<sup>1</sup>

证明. (i):

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots > 0$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \geq \frac{1}{R}$$

或者注意到  $|z| < 1$  时级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n < \infty$$

利用Abel判别法即收敛, 从而必定有  $R \geq 1$ .

(ii): 设  $z = Re^{i\theta}$ ,  $\theta \in (0, 2\pi)$ . 注意到

$$1 - e^{in\theta} = 1 - \cos n\theta - i \sin n\theta = -2 \sin \frac{n\theta}{2} e^{i(\frac{n\theta}{2} + \frac{\pi}{2})}$$

则

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\theta} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{i\theta}(1 - e^{iN\theta})}{1 - e^{i\theta}} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin \frac{N\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} < \infty$$

利用Dirichlet判别法, 则此时只需证明  $a_n R^n$  单调递减趋于0.

利用注可知此时应该把  $R$  换为1, 显然  $a_n$  单调递减趋于0. 即证.

□

5. 证明 (Abel第二定理的又一说法): 若幂级数  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  在多角形域  $G$  的每个顶点处都收敛, 则它必在  $\overline{G}$  上一致收敛. 特别地,  $f$  在  $\overline{G}$  上连续.

证明. 分别在每个角形域的顶点处用Abel第二定理即证.

□

6. 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} z^n$  在其收敛圆周  $\partial B(0, 1)$  上处处收敛, 但不绝对收敛.

<sup>1</sup> 本题题目有误, 反例可取  $a_n = \frac{1}{R^n}$ , 需要将  $\partial B(0, R) \setminus \{R\}$  改为  $\partial B(0, 1) \setminus \{1\}$ .

证明. 显然我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]} }{n} z^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

即不绝对收敛。

注意到

$$\left| \sum_{n=k^2}^{k^2+m} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]} }{n} z^n \right| = \sum_{n=k^2}^{k^2+m} \frac{1}{n} < \frac{m+1}{k^2} \rightarrow 0, \quad 1 \leq m \leq 2k, \quad k \rightarrow \infty$$

则级数之间可以加括号而不改变其收敛性。原式变形为(只考虑  $z = 1$ , 否则由Dirichlet判别法显然)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k^2}^{k^2+2k} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]} }{n} z^n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sum_{n=k^2}^{k^2+2k} \frac{1}{n}$$

定义

$$S_k = \sum_{n=k^2}^{k^2+2k} \frac{1}{n}$$

我们来证明  $S_k$  关于  $k$  单调递减且趋于0. 显然由上面讨论  $S_k \rightarrow 0$ . 而

$$\begin{aligned} S_k - S_{k+1} &= \sum_{n=k^2}^{k^2+2k} \frac{1}{n} - \sum_{n=(k+1)^2}^{(k+1)^2+2(k+1)} \frac{1}{n} \\ &> \sum_{n=k^2}^{k^2+2k} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2k+1} \right) - \frac{2}{k^2+4k+2} \\ &> \frac{2k(2k+1)}{(k^2+2k)(k^2+4k+1)} - \frac{2}{k^2+4k+2} \\ &> \frac{2}{k^2+4k+2} \left( \frac{k(2k+1)}{k+2} - 1 \right) \\ &= \frac{4(k^2-1)}{(k^2+4k+2)(k+2)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

再利用Leibniz判别法即证。 □

注 4.2.1. 类似的可以证明

练习 4.2.1.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{[\sqrt{n}]}}$$

绝对收敛。

7. 证明: 若  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  是  $B(0, 1)$  上的有界全纯函数, 则  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ .

证明. 设收敛半径为  $R > 0$ , 利用结论:  $0 < r < R$  时

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

利用  $f$  有界全纯,  $|z| \leq 1$ , 在  $B(0, 1)$  上有  $R \leq 1$ . 即

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \sup_{0 < r < R} |f(re^{i\theta})|^2 < \infty$$

令  $r$  一致的趋于  $1^-$  可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$$

□

下面来证明这个结论. 注意到

$$|f(re^{i\theta})|^2 = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m} r^m e^{-im\theta} \right) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta}$$

注意到

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \delta_{n,m}$$

其中  $\delta_{n,m}$  为 **Kronecker** 记号. 表示

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

即为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{a_n} r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$$

8. 设  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  的收敛半径  $R > 0$ . 证明: (i)  $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$  是整函数; (ii) 存在正数  $M$ , 使得

$$|\varphi^{(n)}(z)| \leq \frac{M e^{\frac{|z|}{R}}}{R^n}, z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}.^2$$

<sup>2</sup> 本题题目有误, 反例可取  $a_n = n$ , 需要将  $\frac{M e^{\frac{|z|}{R}}}{R^n}$  改为  $\frac{M^n e^{\frac{|Mz|}{R}}}{R^n}$ .

证明. (i):显然有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a_n}{n!}} \right| = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{R}{n+1} \right| = 0$$

则收敛半径为 $+\infty$ .即在全平面上收敛, 为整函数。

(ii):即等价于证明:

$$|\varphi^{(k)}(z)| \leq \frac{M e^{\frac{|z|}{R}}}{R^k}$$

显然有

$$|\varphi^{(k)}(z)| = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \frac{n!}{(n-k)!} z^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+k}}{n!} z^n$$

而利用收敛半径为 $R$ .即有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{1}{R} \Leftrightarrow \exists M > 0, s.t. |a_n R^n| \leq M$$

于是

$$|\varphi^{(k)}(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{a_{n+k}}{n!} z^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{M}{R^{n+k}} \frac{z^n}{n!} \right| = \frac{M}{R^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n! R^n} = \frac{M}{R^k} e^{\frac{|z|}{R}} \quad \square$$

9. 举例说明Abel第二定理的逆不成立.

证明. 取

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{z+1}$$

此时 $f$ 在 $z=1$ 处有非切向极限 $\frac{1}{2}$ , 但是级数在 $z=1$ 时发散。 □

10. 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 将 $B(0, R)$ 一一地映为域 $G$ . 证明:  $G$ 的面积为 $\pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 R^{2n}$ .

证明. 利用[11]2.4节第24题, 有

$$S = \iint_{B(0, R)} |f'(z)|^2 dx dy$$

而

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

作  $z = re^{i\theta}$ ,  $r$  从 0 到  $R$ , 即  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , 对应的 Jacobi 矩阵为  $r$ . 类似第七题, 则

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_{B(0,R)} |f'(z)|^2 dx dy \\
 &= \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} f'(z) \overline{f'(z)} d\theta \\
 &= \sum_{n,m=0}^{\infty} n m a_n \overline{a_m} \int_0^R r^{n+m-1} dr \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \\
 &= 2\pi \sum_{n,m=0}^{\infty} \delta_{n,m} n a_n m \overline{a_m} \int_0^R r^{n+m-1} dr \\
 &= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n \overline{a_n} \int_0^R r^{2n-1} dr \\
 &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 R^{2n}
 \end{aligned}$$

□

11. 证明: 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  在域  $D$  上一致收敛, 当且仅当它在  $\overline{D}$  上一致收敛.

证明.  $\Leftarrow$ : 由于  $D$  为域, 且  $\overline{D} = D \cup D' \supset D$ , 显然.

$\Rightarrow$ : 设  $z_1 \in \partial D$ , 由于收敛的一致性, 可知级数在  $z = z_1$  处也收敛, 即在  $\overline{D}$  上一致收敛. 详细的说明可以利用 Cauchy 收敛原理, 令  $z \rightarrow z_1$  即可. □

12. 设幂级数  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  的收敛半径为 1,  $z_0 \in \partial B(0, 1)$ . 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ , 并且  $\lim_{r \rightarrow 1} f(r z_0)$  存在, 则  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$  收敛于  $\lim_{r \rightarrow 1} f(r z_0)$ .

证明. 取一系列  $r_n \rightarrow 1$ , 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n z_0) = \lim_{r \rightarrow 1} f(r z_0)$$

之后利用 Heine 定理即可. 利用条件,  $\exists N$  满足

$$\forall n > N, |n a_n| < \varepsilon$$

再利用 Stolz 定理

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^N n a_n}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} N a_N < \varepsilon$$

直接相减即

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{k=0}^N a_k z_0^k - f(r_n z_0) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{N-1} a_k z_0^k (1 - r_n^k) \right| + \left| \sum_{k=N}^{\infty} a_k r_n^k z_0^k \right| \\
 &\leq \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| (1 - r_n) k + \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| r_n^k \\
 &\leq N(1 - r_n) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |k a_k| + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{N} |k a_k| r_n^k \\
 &< N(1 - r_n) \varepsilon + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{k=N}^{\infty} r_n^k = N(1 - r_n) \varepsilon + \frac{\varepsilon r_n^N}{N(1 - r_n)} \\
 &< \varepsilon \left( 1 + \frac{1}{2^{N-1} N^2} \right)
 \end{aligned}$$

其中最后一步是因为可以取

$$1 = n(1 - r_n) > N(1 - r_n) > \frac{N}{2}, \quad |r_n| < \frac{1}{2}$$

利用 $\varepsilon$ 的任意性即证。 □

注 4.2.2. 另解: 令  $b_n = a_n z_0^n$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} z_0}{a_n} \right| = 1$$

对  $b_n$  用小  $o$  Tauber 定理即证。

下面来介绍该定理。参考 [14]  $P_{84}, P_{192}$ 。我们有

定理 4.2.1 (Abel 定理). 如果

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$$

则

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = s$$

但是其逆定理不正确。取  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$ ,  $|x| < 1$  即可。但是如果加上条件  $a_k = o\left(\frac{1}{k}\right) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$  可以保证正确。这就是

定理 4.2.2 (小  $o$  Tauber 定理). 设  $f(x)$  在任一区间  $[0, x]$  上可积, 记

$$J(y) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-yx} dx \quad (y > 0).$$

如果  $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ , 且

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_0^{\infty} f(x) e^{-yx} dx = s.$$

则有

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = s$$

证明. 令

$$\tilde{J}(x) = \int_0^{\infty} f(t) dt$$

则

$$\tilde{J}(y^{-1}) - J(y) = \int_0^{\frac{1}{y}} (1 - e^{-yx}) f(x) dx - \int_{\frac{1}{y}}^{\infty} e^{-yx} f(x) dx := I_1 + I_2$$

而

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{1}{y}} (1 - e^{-yx}) f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{y}} O(yx) o\left(\frac{1}{x}\right) dx = o(1) \\ I_2 &= - \int_{\frac{1}{y}}^{\infty} e^{-yx} f(x) dx = o(1) \int_{\frac{1}{y}}^{\infty} e^{-yx} \frac{dx}{x} = o(y) \int_{\frac{1}{y}}^{\infty} e^{-yx} dx = o(1) \end{aligned}$$

综上所述可得

$$\tilde{J}(y^{-1}) - J(y) = o(1), \quad y \rightarrow 0^+$$

□

作为其一个推论有: 我们取

$$f(x) = a_n, \quad x \in [n, n+1), \quad n \geq 0$$

于是

$$J(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_n^{n+1} e^{-yx} dx = \frac{1 - e^{-y}}{y} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ny}$$

令  $x = e^{-y}$ , 则  $y \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow x \rightarrow 1^-$ . 于是

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{y \rightarrow 0^+} J(y) = s$$

于是

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} f(x) dx = s$$

### 4.3 全纯函数的Taylor展开

1. 设 $D$ 是域,  $a \in D$ , 函数 $f$ 在 $D \setminus \{a\}$ 上全纯. 证明: 若 $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$ , 则 $f$ 在 $D$ 上全纯.

证明. 利用Morera定理, 只需要证明对任意的 $\gamma \in D$ , 有

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

当 $\gamma$ 不围绕 $D \setminus \{a\}$ 时, 利用 $f$ 在 $D \setminus \{a\}$ 上全纯, 显然.

而 $\gamma$ 绕过 $\{a\}$ 时, 收缩 $\gamma$ 使得其在一个单位正方形 $\Gamma$ 外部, 由于平移性不妨设 $\{a\}$ 在正方形的中心. 此时不难计算

$$|z - a| = d(a, z) = d(a, \gamma) \geq d(a, \Gamma) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2}$$

有

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| ds < \varepsilon \int_{\gamma} \left| \frac{1}{z - a} \right| ds < 2\ell(\gamma)\varepsilon$$

由 $\varepsilon$ 的任意性即证. □

2. 将 $e^{\frac{z}{1-z}}$ 在 $z = 0$ 处展开为幂级数.

证明. 注意到

$$e^{\frac{z}{1-z}} = \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{e}$$

我们只需求出 $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$ 在 $z = 0$ 处展开. 利用母函数法求解

$$f'(z) = f(z) \cdot \frac{1}{(1-z)^2} \Leftrightarrow (1-z)^2 f'(z) - f(z) = 0$$

设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , 则

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$$

代入计算得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$$

于是

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 \\ a_2 &= \frac{3}{2}a_1 \\ (n+1)a_{n+1} - 2na_n + (n-1)a_{n-1} - a_n &= 0, \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

由  $f(0) = e^{\frac{1}{1-0}} = e$ , 得:

$$a_0 = e, \quad a_1 = a_0 = e$$

暴力计算出前几项

$$\begin{aligned} a_0 &= a_1 = e, \quad a_2 = \frac{3e}{2} \\ a_3 &= \frac{13e}{6}, \quad a_4 = \frac{73e}{24} \\ a_5 &= \frac{167e}{40}, \quad a_6 = \cdots \end{aligned}$$

于是

$$e^{\frac{z}{1-z}} = 1 + z + \frac{3}{2}z^2 + \frac{13}{6}z^3 + \frac{73}{24}z^4 + \frac{167}{40}z^5 + \cdots \quad \square$$

3. 证明: (i)  $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}, \forall z \in \mathbb{C}$ ; (ii)  $(3-e)|z| < |e^z - 1| < (e-1)|z|, 0 < |z| < 1$ .

证明. (i): LHS 利用

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n!} \right|$$

而 RHS 等价于

$$\forall t = |z| > 0, (t-1)e^t + 1 \geq 0$$

在  $t \geq 1$  时显然,  $0 < t < 1$  时利用  $e^t \leq 1 + (e-1)t < 1 + 2t$  (高考不等式)

$$(t-1)e^t + 1 > (1+2t)(t-1) + 1 = t + 2t^2 > 0$$

(ii): RHS 利用 (i), 只需要证明

$$\forall t = |z| \in (0, 1), e^t - 1 < (e-1)t$$

求导后显然。而 LHS 可以直接用最大模原理。验证

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

于是

$$\min_{|z|=1} \left| \frac{e^z - 1}{z} \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \right| \geq 1 - \min_{|z|=1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} \right| = 3 - e \quad \square$$

4. 设  $f \in H(B(0, R)) \cap C(\overline{B(0, R)})$ ,  $S_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$ . 证明:

$$(i) : S_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} f(\zeta) \frac{\zeta^{n+1} - z^{n+1}}{(\zeta - z)\zeta^{n+1}} d\zeta, \forall z \in B(0, R);$$

$$(ii) : f(z) - S_n(z) = \frac{z^{n+1}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}(\zeta - z)} d\zeta, \forall z \in B(0, R).$$

证明. 利用

$$\frac{1}{\zeta^{n+1}} \frac{\zeta^{n+1} - z^{n+1}}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta^{n+1}} \sum_{k=0}^n \zeta^{n-k} z^k = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{\zeta^{k+1}}$$

再利用

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - 0)^{k+1}} d\zeta$$

而有限项下积分与求和可换, 即证。

(ii): 利用Cauchy积分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

直接与(i)相减即可。 □

5. 是否存在  $f \in H(B(0, 1))$ , 使得下述条件之一成立:

- (i)  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1}, n = 2, 3, 4, \dots$ ; (ii)  $f\left(\frac{1}{2n}\right) = 0, f\left(\frac{1}{2n-1}\right) = 1, n = 1, 2, 3, \dots$ ;  
 (iii)  $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}, n = 2, 3, 4, \dots$ ; (iv)  $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}, n = 2, 3, 4, \dots$ .

证明. (i): 构造

$$g(z) = f(z) - \frac{1}{1+z}$$

于是  $g(z)$  有一系列内部收敛零点  $z = \frac{1}{n}$ , 于是由唯一性定理可得

$$f(z) = \frac{1}{1+z}$$

(ii):如果存在, 由唯一性定理, 有

$$0 = f(z) = 1$$

矛盾!则不存在函数。或者构造一个函数满足要求(例如: $f(z) = |\sin \frac{\pi}{2z}|$ )然后证明其不全纯即可。

(iii):类似(i),为

$$f(z) = z^2$$

(iv):类似(ii),显然不存在这样的函数。 □

6. 设  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  的收敛半径  $R > 0$ ,  $0 < r < R$ ,  $A(r) = \max_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z)$ . 证明:

(i)  $a_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\operatorname{Re} f(re^{i\theta})] e^{-in\theta} d\theta, \forall n \in \mathbb{N}$ ; (ii)  $|a_n| r^n \leq 2A(r) - 2\operatorname{Re} f(0), \forall n \in \mathbb{N}$ .

证明. (i):作  $z = re^{i\theta}$ , 则

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{f(z) + \overline{f(z)}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k e^{ik\theta} + \overline{a_k} e^{-ik\theta}) r^k$$

于是

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\operatorname{Re} f(re^{i\theta})] e^{-in\theta} d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta} d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \delta_{k,n} = a_n r^n$$

或者利用Taylor展开式中系数

$$a_n = f^{(n)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^n} e^{-in\theta} d\theta$$

类似的利用

$$\int_{|\zeta|=r} f(\zeta) \zeta^{n-1} d\zeta = 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) i r^n e^{in\theta} d\theta = 0$$

两边取共轭即有

$$\int_0^{2\pi} \overline{f(re^{i\theta})} e^{-in\theta} d\theta = 0$$

相加即证明。

(ii):注意到  $f(0) = 0$ , 即  $\operatorname{Re} f(0) = 0$ . 利用(i)可得

$$|a_n| r^n = \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\operatorname{Re} f(re^{i\theta})] e^{-in\theta} d\theta \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} f(re^{i\theta})| e^{-in\theta} d\theta \leq 2A(r) \quad \square$$

注 4.3.1. 直接作换元可得

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

显然当  $r < R$  时, 级数一致收敛, 即

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

7. 设  $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  在  $B(0, 1)$  上全纯, 并且  $\operatorname{Re} f(z) \geq 0, \forall z \in B(0, 1)$ . 证明:

(i)  $|a_n| \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$ ; (ii)  $\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \operatorname{Re} f(z) \leq |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}, \forall z \in B(0, 1)$ ; (iii)  $|a_1^2 - a_2| \leq 2, |2a_1 a_2 - a_1^3 - a_3| \leq 2$ .

证明. (i): 利用 3.2 节的第五题, 由于  $f$  全纯, 显然  $\operatorname{Re} f = u$  为调和函数. 再利用第六题的(i). 于是

$$|a_n r^n| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta = 2u(0) = 2$$

注意到左式对任意的  $r \in (0, 1)$  上都成立, 令  $r \rightarrow 1^-$  即可。

(ii): 其中  $RHS$  利用 (i) 和  $|z| < 1$ .

$$f(z) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n z^n| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|z|^n = 1 + \frac{2|z|}{1-|z|} = \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

对于  $LHS$ , 代入  $a_n$  表达式可得 (3.4 节第八题 Schwarz 积分公式)

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{ze^{-i\theta}}{r} \right)^n \operatorname{Re} f(re^{i\theta}) d\theta \\ &= 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ze^{-i\theta}}{r - ze^{-i\theta}} \operatorname{Re} f(re^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(re^{i\theta}) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ze^{-i\theta}}{r - ze^{-i\theta}} \operatorname{Re} f(re^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} \operatorname{Re} f(re^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

其中第二步进行了积分与求和的交换。

两边取实部, 可得

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left( \frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} \right) \operatorname{Re} f(re^{i\theta}) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|r|^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} \operatorname{Re} f(re^{i\theta}) d\theta \\
 &\geq \frac{|r|^2 - |z|^2}{(|r| + |z|)^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(re^{i\theta}) d\theta \\
 &= \frac{|r| - |z|}{|r| + |z|}
 \end{aligned}$$

令  $r \rightarrow 1^-$ , 即证。

或者构造函数

$$g(z) = \frac{1 - f(z)}{f(z) + 1}$$

容易验证

$$g(0) = 1, |g(z)| \leq 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} f(z) > 0$$

利用Schwarz引理可得

$$|g(z)| \leq |z|$$

利用

$$|g(z)| = \frac{|1 - f(z)|}{|f(z) + 1|} \geq \frac{\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right|}{|f(z)| + 1} \geq \frac{1 - |f(z)|}{|f(z)| + 1}, \frac{|f(z)| - 1}{|f(z)| + 1}$$

可得

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

(iii): 定义

$$g(z) := \frac{1 - f(z)}{f(z)}$$

并设  $g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i$ , 其中定义  $b_0 = 0$ . 于是

$$-\sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1} z^i = \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n b_k a_{n-k} z^n$$

不妨对  $b_n$  取相反数(容易计算,且  $|b_n| = |-b_n|$ ), 逐步不难验证有

$$\begin{cases} b_1 = a_1, \\ b_2 + a_1 b_1 = a_2 \\ b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 = a_3 \\ b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 = a_4 \\ \dots\dots \end{cases}$$

反解出  $b_n$  可得

$$\begin{cases} b_1 = a_1, \\ b_2 = a_2 - a_1^2 \\ b_3 = a_3 + a_1^3 - 2a_1 a_2 \\ b_4 = a_4 + 3a_1^2 a_2 - a_1^4 - 2a_1 a_3 - a_2^2 \\ \dots\dots \end{cases}$$

注意到  $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} \overline{f(z)}$ ,  $|f(z)|^2 \in \mathbb{R}$  (利用 4.2 节的第七题, 并沿用记号), 注意到有

$$n - m = k\pi, k, n, m \in \mathbb{N}$$

不难看出此时必有  $k \equiv 0$  (否则  $n, m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , 矛盾)。于是

$$|f(z)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

最后利用第六题的第一问有

$$b_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\operatorname{Re} g(re^{i\theta})] e^{-in\theta} d\theta, \quad \operatorname{Re} g(z) = \frac{\operatorname{Re} f(z)}{|f(z)|^2} - 1$$

令  $r \rightarrow 1^-$  可得(注意到  $a_0 = 1$ )

$$|b_n| = \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\operatorname{Re} f(z)}{|f(z)|^2} - 1 \right] e^{-in\theta} d\theta \right| \leq \frac{2}{|f(z)|^2} = \frac{2}{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2} \leq 2 \quad \square$$

进一步的更有

$$|a_1^4 + 2a_1 a_3 + a_2^2 - a_4 - 3a_1^2 a_2| \leq 2$$

注 4.3.2. 此题第二问中给出了一个 Schwarz 积分公式的新证明。

8. 证明: 所有实变量的三角恒等式在复变量时也成立.

证明. 利用唯一性定理, 复变量时显然在实轴(子集)上恒等式成立, 显然恒等式左右两边为全纯函数, 即证.  $\square$

9. 证明: 所有实变量的初等函数的幂级数展开式在复变量时也成立.

证明. 类似第八题, 构造左右相减函数, 且幂级数展开式显然为全纯函数, 再利用唯一性定理即可.  $\square$

10. 证明: 若函数  $\frac{1}{\cos z}$  在  $z = 0$  处的Taylor级数为  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$ , 则Euler数  $E_{2n}$  满足关系式

$$E_0 = 1, \\ \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} E_{2k} = 0.$$

证明. 等价于

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

再利用Cauchy积

$$\begin{aligned} RHS &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n E_{2k} z^{2n}}{(2n-2k)!(2k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(2n)! E_{2k}}{(2n-2k)!(2k)!} \right] z^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left[ \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} E_{2k} \right] z^{2n} \end{aligned}$$

显然通过比较两边  $z$  的次数可得关系式成立.  $\square$

11. 证明: 若  $\frac{z}{e^z - 1}$  在  $z = 0$  处的Taylor级数为  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ , 则Bernoulli数  $B_n$  满足关系式

$$B_0 = 1, \\ \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = 0.$$

特别地,  $B_1 = -\frac{1}{2}, B_{2n+1} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

证明. 类似于上一题, 有

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!(n-k+1)!} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n \frac{B_k(n+1)!}{(n-k+1)!k!} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left[ \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k \right] z^n \end{aligned}$$

通过比较两边 $z$ 的次数可得关系式成立。  $\square$

12. 证明: 若  $\frac{1}{1-z-z^2}$  在  $z=0$  处的Taylor级数为  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , 则Fibonacci数  $a_n$  满足关系式

$$\begin{aligned} a_0 &= a_1 = 1, \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

证明. 我们有

$$1 = (1 - z - z^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^n$$

移项化简即

$$\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1} - a_{n-2}) z^n = 0$$

即证。  $\square$

13. 设  $D$  是有界域,  $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$ . 证明: 若  $f$  在  $\partial D$  上不取零值, 则  $f$  在  $D$  中只有有限个零点.

证明. 反证, 如果  $D$  中有无限个零点, 等价于存在一个小邻域, 其内部有无限多零点, 否则由  $D$  是有界域, 用有限覆盖定理即可。而利用解析函数零点孤立性有  $f \equiv 0$ , 这与  $f$  在  $\partial D$  上不取零值矛盾!  $\square$

14. 设  $D$  是域,  $a \in D, f \in H(D)$ , 并且  $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)$  收敛. 证明:

(i)  $f$  是整函数; (ii)  $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z)$  在  $\mathbb{C}$  上内闭一致收敛.

证明. 利用4.2节的第八题。

(i):

$$f \in H(D) \Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

且  $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)$  收敛等价于其收敛半径大于0, 即证。

(ii):  $\exists M > 0$ , 使得

$$|f^{(k)}(z)| \leq \frac{Me^{\frac{|z|}{R}}}{R^k}$$

于是

$$\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(z) \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f^{(k)}(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Me^{\frac{|z|}{R}}}{R^k} = \lim_{N \rightarrow \infty} Me^{\frac{|z|}{R}} \frac{1 - \frac{1}{R^N}}{1 - \frac{1}{R}} < \frac{RM e^{\frac{|z|}{R}}}{R-1} < \infty \quad \square$$

15. 设  $f(x)$  是  $(-R, R)$  上的  $C^\infty$  实函数. 证明:  $f(x)$  能在  $(-R, R)$  上展开为它在  $x = 0$  处的Taylor级数, 当且仅当存在  $[0, R)$  上的正值函数  $M(r)$ , 使得当  $n \geq 0, |x| < r < R$  时, 成立不等式

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{M(r)n!}{(r-|x|)^{n+1}}.$$

由此可见, 实变量的函数能展开为Taylor级数的条件是多么苛刻.

证明. 满足题目条件的实函数又称**实解析函数**(官方的定义:[3]附录)。一般在  $x = x_0$  处可以在0处作  $x + x_0$  平移。

$\Rightarrow$ : 利用解析延拓到平面上, 再用Cauchy积分公式

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta=r|} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-x)^{n+1}} d\zeta$$

则

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{n!r \sup_{|\zeta|=r} |f(z)|}{(r-|x|)^{n+1}} := \frac{M(r)n!}{(r-|x|)^{n+1}}$$

$\Leftarrow$ : 此时对于任意的  $|x| < r$ , 取  $y \in (x - \delta, x + \delta)$ , 且  $\theta(y)$  在  $y, x$  之间. 利用Taylor公式, 只需证明当  $n \rightarrow \infty$  时, 余项  $\rightarrow 0$  即可。而

$$\frac{f^{(n)}(\theta(y))}{n!} (y-x)^n \leq \frac{M(r)\delta^n}{(r-|\theta(y)|)^{n+1}} \leq \frac{M(r)\delta^n}{(r-\delta)^{n+1}}$$

其中  $\delta \geq |\theta(y)|$  是因为在直线上的几何意义。只需要取  $\delta > 0$ , 且使得  $\delta < \frac{r}{2}$  即可, 不妨取  $\delta = \frac{r}{3}$ 。  
于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M(r)\delta^n}{(r-\delta)^{n+1}} = \frac{3M(r)}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

于是  $f(x)$  在  $(-r, r)$  上处处实解析, 即证。  $\square$

## 4.4 辐角原理和Rouché定理

1. 设 $D$ 是由有限条可求长简单闭曲线围成的域. 证明: 若 $f, g \in H(\overline{D})$ ,  $f$ 在 $\partial D$ 上没有零点,  $f$ 在 $D$ 中的全部彼此不同的零点为 $z_1, z_2, \dots, z_n$ , 其相应的阶数分别为 $k_1, k_2, \dots, k_n$ , 则

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n k_j g(z_j).$$

说明: 这是Cauchy积分公式和辐角原理的推广.

证明. 围绕着 $f$ 的零点 $z_j$ 作 $\gamma_j$ 包围着, 在每一个 $\gamma_j$ 上设 $f(z) = (z - z_j)^{k_j} h_j(z)$ , 利用多连通域Cauchy公式可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} g(z) \left( \frac{k_j}{z - z_j} + \frac{h'_j(z)}{h_j(z)} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n k_j \int_{\gamma_j} \frac{g(z)}{z - z_j} dz \\ &= \sum_{j=1}^n k_j g(z_j) \end{aligned}$$

其中第三步利用了

$$\frac{h'_j(z)}{h_j(z)}$$

在 $D$ 上全纯。 □

2. 利用辐角原理证明代数学的基本定理.

证明. 设 $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ . 当 $|z| = R$ 充分大时

$$|P_n(z)| \geq |z^n| - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| > 0$$

即多项式 $P_n(z)$ 无零点。只需考虑 $|z| < R$ 时其零点个数, 记为 $N$ 。利用辐角原理, 有

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{|z|=R} \arg P_n(z) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{|z|=R} \arg z^n + \frac{1}{2\pi} \Delta_{|z|=R} \arg \sum_{k=0}^n a_k z^{k-n} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{|z|=R} \arg z^n \\
 &= n \frac{1}{2\pi} \Delta_{|z|=R} \arg z \\
 &= n
 \end{aligned}$$

最后一个等号是因为当 $z$ 绕着 $|z| = R$ 转一圈时, 辐角改变量为正 $2\pi$ 。定义

$$g(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^{k-n}$$

第三个等号是因为在边界 $|z| = R$ 时, 有

$$|g(z) - a_n| < |a_n|$$

这表明当 $z$ 在圆周上转一圈时,  $g(z)$ 在以 $a_n$ 为圆心,  $|a_n|$ 为半径的圆内部。即其辐角改变量为0。我们完成证明。□

3. 设 $\lambda > 1$ . 证明: 方程 $z = \lambda - e^{-z}$ 在右半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ 中恰有一个根, 并且是正实根。

证明. 设 $z = x + iy, x > 0, y \in \mathbb{R}$ , 代入可得

$$x + iy + e^{-x-iy} = \lambda = \bar{\lambda} = x - iy + e^{-x+iy}$$

整理两边可得

$$2iy = e^{-x}(e^{iy} - e^{-iy})$$

即

$$ye^x = \sin y$$

通过取绝对值, 再利用 $|\sin x| \leq |x|$ 可得

$$|ye^x| \leq |y| \Rightarrow e^x \leq 1$$

显然此时必定取等号, 即 $|y| = 0$ , 即根必为实数。直接求导可得

$$f(x) = e^{-x} + x - \lambda \Rightarrow f'(x) = 1 - e^{-x} \geq 0$$

因为 $f(x)$ 单调增,  $f(0) = 1 - \lambda < 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty > 0$ , 即只有一个零点。□

4. 设  $0 < a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ . 证明: 三角多项式

$$a_0 + a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + \cdots + a_n \cos n\theta$$

在  $(0, 2\pi)$  中有  $2n$  个不同的零点.

提示: 首先证明  $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  在  $B(0, 1)$  中有  $n$  个根.

证明. 我们先来证明提示, 即以下定理.

**定理 4.4.1 (Eneström-Kakeya定理).** 如果

$$0 < a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$$

则  $P_n(z)$  的零点均在单位圆内. 反之, 如果

$$0 < a_n \leq a_{n-1} \leq \cdots \leq a_0$$

则  $P_n(z)$  的零点均在单位圆外.

证明. 我们有

$$(1-z)P_n(z) = -a_n z^{n+1} + (a_n - a_{n-1})z^n + \cdots + (a_1 - a_0)z + a_0$$

反证, 此时如果存在  $|z| > 1$  为其根时. 显然  $(1-z)P_n(z) = 0 \Leftrightarrow P_n(z) = 0$ . 于是

$$\begin{aligned} a_n &= |a_n| \\ &= \left| \frac{a_n - a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1 - a_0}{z^n} + \frac{a_0}{z^{n+1}} \right| \\ &\leq \left| \frac{a_n - a_{n-1}}{z} \right| + \cdots + \left| \frac{a_1 - a_0}{z^n} \right| + \left| \frac{a_0}{z^{n+1}} \right| \\ &< \sum_{k=1}^n |a_k - a_{k-1}| + |a_0| \\ &= a_n \end{aligned}$$

这是一个矛盾!

如果  $a_n$  单调递减, 对  $a_0$  考虑即可, 或者考虑自反多项式

$$\widetilde{P}_n(z) = z^n P_n\left(\frac{1}{z}\right)$$

□

下面我们来完成证明, 由定理, 不妨设

$$P_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

代入  $z = e^{i\theta}$ , 取共轭相加可得

$$\sum_{k=1}^n a_k \cos k\theta = \frac{1}{2} \left( P_n(e^{i\theta}) + \overline{P_n(e^{i\theta})} \right) = \frac{1}{2} \left( P_n(e^{i\theta}) + P_n(e^{-i\theta}) \right)$$

为了方便我们仍用  $z$  表示, 不过此时  $|z| = 1$ . 于是三角多项式有零点等价于

$$P_n(z) + P_n(\bar{z}) = 0$$

利用  $|z| = 1$ , 自然也等价于

$$P_n(z) + P_n\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

拆开整理可得

$$\begin{aligned} 0 &= P_n(z) + P_n\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^n a_k z^k + \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{1}{z}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \left( z^k + \frac{1}{z^k} \right) \\ &\Leftrightarrow Q(z) := \sum_{k=0}^n a_k \left( z^{k+n} + z^{n-k} \right) = 0 \end{aligned}$$

显然  $\deg Q(z) = 2n$ , 由代数学基本定理可得其在  $|z| = 1$  上至少有  $2n$  个零点, 即证。  $\square$

5. 利用Rouché定理证明代数学的基本定理.

证明. 设多项式为

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_n \neq 0$$

当  $|z| > R$  充分大时, 有

$$|P(z) - a_n z^n| < |a_n z^n|$$

这是因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(z) - a_n z^n}{a_n z^n} = 0$$

显然  $a_n z^n$  有  $n$  个根, 即证。  $\square$

6. 设  $0 < r < 1$ . 证明: 当  $n$  充分大时, 多项式

$$1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$$

在  $B(0, r)$  中没有根.

证明. 设题目中多项式为  $P(z)$ . 当  $n$  充分大时,

$$P(z) = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} = \left( \frac{1}{1-z} \right)' = \frac{1}{(1-z)^2}$$

显然在  $z \in B(0, r) \subset B(0, 1)$  时级数一致收敛, 于是有

$$\left| P(z) - \frac{1}{(1-z)^2} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} kz^{k-1} \right| < \left| \frac{1}{(1-z)^2} \right|$$

因为  $LHS$  一致收敛, 余项趋于 0. 显然  $\frac{1}{(1-z)^2}$  在  $B(0, r)$  上没有零点, 即证.  $\square$

7. 设  $r > 0$ . 证明: 当  $n$  充分大时, 多项式

$$1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n$$

在  $B(0, r)$  中没有根.

证明. 当  $n$  充分大的时候, 定义  $P(z)$  为题中多项式, 于是

$$\begin{aligned} |P(z) - e^z| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{r^k}{k!} < \sum_{k=0}^n \frac{r^k}{k!} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{r^k}{k!} \\ &< \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| = |e^z| \end{aligned}$$

其中第二步是因为一致收敛, 可取充分大的  $N$  使得第二步成立. 于是  $P(z)$  与  $e^z$  的零点相同, 显然  $e^z$  没有零点, 即证.  $\square$

8. 设  $f(z)$  在  $\overline{B(0, 1)}$  上全纯, 并且  $f'(z)$  在  $\partial B(0, 1)$  上无零点. 证明: 当  $n$  充分大时,  $F_n(z) = n \left[ f\left(z + \frac{1}{n}\right) - f(z) \right]$  与  $f'(z)$  在  $B(0, 1)$  中的零点个数相等.

证明. 利用

$$f\left(z + \frac{1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z)}{k!} \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

于是

$$\begin{aligned} |F_n(z) - f'(z)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z)}{k!} \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} - f'(z) \right| \\ &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z)}{k!} \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} \right| < |f'(z)| \end{aligned}$$

最后一步是因为当 $n$ 充分大的时候 $LHS \rightarrow 0, RHS = |f'(z)| > 0$  (在 $\partial B(0, 1)$ 上 $f'(z) \neq 0$ )。  $\square$

9. 设 $D$ 是域,  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 是全纯映射,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . 证明: 若 $\{f_n\}$ 在 $D$ 上内闭一致收敛于 $f$ , 则或者 $f(D) = \{0\}$ , 或者 $f(D) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

证明. 如果 $f(z) \neq 0$ , 只需要证明 $f(z)$ 在 $D$ 上无零点. 反证, 如果 $\exists z_0 \in D, s.t. f(z_0) = 0$ , 可以取 $B(z_0, \delta) \subset D$ , 显然 $z_0$ 在圆盘上为孤立零点. 而 $\{f_n\} \neq 0$ 在 $B(z_0, \delta)$ 上内闭一致收敛于 $f$ , 利用Hurwitz定理, 即 $f_n$ 与 $f$ 在 $\gamma = \partial B(z_0, \delta)$ 内部零点个数相同. 而显然矛盾! 于是必定有 $f(D) = \{0\}$ , 或者 $f(D) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .  $\square$

10. 利用上题的结论证明: 若域 $D$ 上的单叶全纯函数列 $\{f_n\}$ 在 $D$ 上内闭一致收敛于 $f$ , 则或者 $f$ 是常数, 或者 $f$ 也是 $D$ 上的单叶全纯函数.

证明. 若 $f(z)$ 是常数, 显然成立. 如果不恒为常数, 利用 $f_n(z)$ 单叶, 则

$$\forall z_1, z_2 \in D, z_1 \neq z_2, s.t. f_n(z_1) \neq f_n(z_2)$$

此时构造

$$g_n(z) = f_n(z) - f(z_1)$$

则 $\forall z \neq z_1, g_n(z) \neq 0$ . 于是 $g_n(z)$ 在 $D$ 上内闭一致收敛于 $g(z) = f(z) - f(z_1)$ , 利用上题的结论, 我们有

$$\forall z \neq z_1, g(z) \neq 0 \Leftrightarrow f(z) \neq f(z_1)$$

这蕴含着 $f(z)$ 单叶。  $\square$

11. 求下列全纯函数在 $B(0, 1)$ 中的零点个数:

- (i)  $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2$ ; (ii)  $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8$ ;  
(iii)  $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$ ; (iv)  $e^z - 4z^n + 1$ .

证明. (i):显然

$$|f(z) - (-8z)| \leq 1 + 2 + 1 + 2 < |-8z| = 8$$

则有1个零点。

(ii):

$$|f(z) - 8| < 2 + 1 + 3 + 1 < |8|$$

即无零点。

(iii):

$$|f(z) - (-5z^4)| < 1 + 1 + 2 < |-5z^4| = 5$$

即有4个零点。

(iv):

$$|f(z) - (-4z^n)| = |e^z + 1| < e^{\operatorname{Re} z} + 1 < e + 1 < |-4z^n| = 4$$

即有 $n$ 个零点。  $\square$

12. 证明: 若  $f \in H(B(0, 1)) \cap C(\overline{B(0, 1)})$ ,  $f(\overline{B(0, 1)}) \subset B(0, 1)$ , 则  $f(z)$  在  $B(0, 1)$  中有唯一的不动点。

证明. 因为  $f(\overline{B(0, 1)}) \subset B(0, 1)$ , 即  $|f(z)| < |z|$  考虑

$$|f(z) - z - (-z)| < |-z|$$

由Rouché定理,  $g(z) = f(z) - z = 0$  有一个根, 则只有唯一的一个不动点。  $\square$

13. 设  $a_1, a_2, \dots, a_n \in B(0, 1)$ ,  $f(z) = \prod_{k=1}^n \frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z}$ . 证明:

(i) 若  $b \in B(0, 1)$ , 则  $f(z) = b$  在  $B(0, 1)$  中恰有  $n$  个根;

(ii) 若  $b \in B(\infty, 1)$ , 则  $f(z) = b$  在  $B(\infty, 1)$  中恰有  $n$  个根。

证明. (i):注意到当  $z \in \partial B(0, 1)$  时, 有

$$\left| \frac{a - z}{1 - \bar{a}z} \right| = \left| \frac{a - e^{i\theta}}{1 - \bar{a}e^{i\theta}} \right| = \left| \frac{a - e^{i\theta}}{e^{-i\theta} - \bar{a}} \right| = 1$$

于是  $|-f(z)| = 1 > |b| = |b - f(z) - (-f(z))|$ , 即  $f(z) - b$  与  $f(z)$  有相同的零点, 显然  $f(z)$  有  $n$  个零点  $z = a_k$ . 且此时其极点

$$|z| = \left| \frac{1}{\bar{a}_k} \right| > 1$$

(ii):显然

$$f(z) = b \Leftrightarrow \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{b}$$

且  $\frac{1}{f(z)}$  的极点  $|z| = |a_k| < 1$ 。于是

$$\left| \frac{1}{f(z)} \right| = 1 > \left| \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{f(z)} - \left( -\frac{1}{f(z)} \right) \right|$$

显然此时  $\frac{1}{f(z)}$  有  $n$  个零点  $z = \frac{1}{a_k}$ , 即证。  $\square$

14. 设  $f \in H(\overline{B(0, R)})$ ,  $f$  在  $\partial B(0, R)$  上没有零点, 在  $B(0, R)$  中的零点个数为  $N$ . 证明:

$$\max_{|z|=R} \operatorname{Re} \left( z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \geq N.$$

证明. 利用辐角原理我们有

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \frac{f'(Re^{i\theta})}{f(Re^{i\theta})} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left( z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) d\theta \end{aligned}$$

两边取  $\operatorname{Re}$ , 我们有

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left( z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) d\theta \leq \max_{|z|=R} \operatorname{Re} \left( z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \quad \square$$

15. 设  $f$  是域  $D$  上非常数的全纯函数.

证明: 存在在  $D$  中无极限点的点列  $\{z_n\}$ , 使得对每个  $z \in D \setminus \{z_n\}$ , 有  $f'(z) \neq 0$ .

证明. 反证: 不妨设  $f(z_n) = 0$ , 否则这是显然的. 如果不存在  $D$  中无极限点的点列  $\{z_n\}$ . 即对每个  $z \in D \setminus \{z_n\}$ , 且  $f'(z) \neq 0$ , 点列  $\{z_n\}$  均有极限点. 此时利用全纯函数的零点孤立性可知  $f(z)$  在极限点的小邻域  $U$  上恒为 0. 即此时

$$f'(z) \equiv 0, \quad \forall z \in U$$

显然

$$D \setminus \{z_n\} \cap U \neq \emptyset$$

这是一个矛盾。  $\square$

16. 设 $D$ 是由可求长简单闭曲线围成的单连通域,  $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$ . 证明: 若 $f$ 在 $\partial D$ 上取实值, 则 $f$ 为常值函数. 举例说明, 对于一般的单连通域 $D$ , 结论不再成立.

证明. 设

$$f(z) = u(z) + iv(z)$$

显然 $u(z), v(z)$ 为调和函数. 利用 $f$ 在 $\partial D$ 上取实值, 则

$$v(z) \equiv 0, \forall z \in \partial D$$

于是立即有(调和函数极值原理)

$$f(z) = u(z)$$

利用 $f$ 全纯, 利用Cauchy-Riemann方程可得

$$u \equiv C$$

反例: 考虑

$$D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}, f(z) = z \quad \square$$

17. (边界对应原理的特例) 设 $D$ 是由可求长简单闭曲线 $\gamma$ 围成的单连通域,  $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$ . 证明: 若 $f$ 将 $\gamma$ 一一地映为简单闭曲线 $\Gamma$ , 则 $f$ 将 $D$ 双全纯地映为由 $\Gamma$ 围成的单连通域 $G$ .

证明. 参考[4]P<sub>159</sub>. 设映过去点为 $w = f(z)$ , 并设 $w_0 \notin \Gamma$ . 由辐角原理, 函数 $f(z) - w_0$ 在 $\gamma$ 内部零点个数 $N$ 为

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w - w_0}$$

其中保持正向取 $+$ . 如果 $w_0$ 在 $\Gamma$ 外部, 则 $N = 0$ . 如果在内部, 区域设为 $G$ , 易得

$$N = \pm 1 \Rightarrow N = 1, (N \geq 0)$$

所以 $f(z) = w_0$ 只有一根, 且 $f$ 必定为保持正向映射. 由上可知

$$G \subset f(D) \subset \overline{G}$$

注意到 $G, f(D)$ 为开集(开映射定理), 于是

$$G^\circ = G \subset f(D)^\circ = f(D) \subset \overline{G} = G$$

则 $G = f(D)$ , 即证. □

注 4.4.1. 参考[4]P<sub>157</sub>定理8. 我们有

**定理 4.4.2.** 若 $f(z)$ 在 $D$ 内全纯且不为常数, 则

1. 若 $D$ 为开集, 则 $f(D)$ 为开集。(开映射定理)
2. 若 $D$ 为区域, 则 $f(D)$ 为区域。(保域性定理)

证明略去。

18. (辐角原理) 设 $D$ 是由有限条可求长简单闭曲线围成的域,  $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$ . 证明: 若 $f$ 在 $\partial D$ 上不取零值, 则 $f$ 在 $D$ 中的零点个数为

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D} \operatorname{Arg} f(z),$$

其中,  $n$ 阶零点视为 $n$ 个零点.

证明. 通过作简单闭曲线之间的连线(不通过函数零点)分解即可。 □



## 4.5 最大模原理和Schwarz引理

1. 设  $D$  是域,  $f_n \in H(D) \cap C(\overline{D})$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . 证明: 若  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  在  $\partial D$  上一致收敛, 则必在  $\overline{D}$  上一致收敛.

证明. 函数列在  $\partial D$  上一致收敛, 利用Cauchy收敛原理和最大模原理可得在函数列也在  $D$  上一致收敛(在边界上取sup), 再利用4.2节的第十一题, 从而在  $\overline{D}$  上一致收敛. 详细的证明步骤我们留给读者作为习题.  $\square$

2. 设  $f \in H(B(0, R)) \cap C(\overline{B(0, R)})$ ,  $M = \max_{|z|=R} |f(z)|$ . 证明: 若  $z_0 \in B(0, R) \setminus \{0\}$  是  $f(z)$  的零点, 则

$$R|f(0)| \leq (M + |f(0)|)|z_0|.$$

证明. 反解, 只需要证明

$$|f(0)| \leq \frac{M|z_0|}{R - |z_0|}$$

考虑Cauchy积分公式, 我们有

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0 \\ f(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z} dz \end{aligned}$$

相减可得

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{-f(z)z_0}{z(z - z_0)} dz$$

用长大不等式可得

$$\begin{aligned} |f(0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \left| \frac{f(z)z_0}{z(z - z_0)} \right| ds \\ &\leq \frac{M}{2\pi R} \int_{|z|=R} \frac{|z_0|}{|z| - |z_0|} ds \\ &= \frac{M|z_0|}{R - |z_0|} \end{aligned} \quad \square$$

3. 设  $z_1, z_2, \dots, z_n \in B(\infty, 1)$ . 证明: 存在  $z_0 \in \partial B(0, 1)$ , 使得  $\prod_{k=1}^n |z_0 - z_k| > 1$ .

证明. 设  $f(z) = \prod_{k=1}^n |z - z_k|$ , 反证如果对任意的  $z \in \partial B(0, 1)$ ,  $f(z) \leq 1$ . 注意到

$$f(0) = \prod_{k=1}^n |z_k| > 1 = f(z)$$

这与最大模定理相矛盾。  $\square$

4. 设  $f \in H(B(0, R))$ . 证明:  $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$  是  $[0, R)$  上的增函数.

证明. 显然当  $r_1 < r_2$  时

$$B(0, r_1) \subset B(0, r_2) \Rightarrow M(r_1) < M(r_2)$$

注意不能取等, 否则在  $\{z : r_1 < |z| < r_2\}$  上取常数, 由最大模原理,  $f$  恒为常值不增函数, 矛盾。  $\square$

5. 利用最大模原理证明代数学的基本定理.

证明. 考虑反证, 不妨设  $P(z) > 0$ , 于是

$$\exists R > 0, \text{ s.t. } \forall |z| > R, \frac{1}{P(z)} < \varepsilon$$

由最大模原理, 在  $\{z : |z| \leq R\}$  上

$$\frac{1}{P(z)} \leq \sup \left( \frac{1}{P(z)} \right) < \varepsilon$$

令  $R \rightarrow \infty$ , 则对于  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $P(z)$  处处为  $\infty$ , 显然是矛盾的。  $\square$

6. 设  $f \in H(B(\infty, R)) \cap C(\overline{B(\infty, R)})$ , 并且  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$  存在.

证明: 若  $f$  非常数, 则  $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$  是  $[R, \infty)$  上的严格减函数.

证明. 我们定义

$$g(z) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{z}\right), & 0 < |z| < R \\ \lim_{z \rightarrow \infty} f(z), & z = 0 \end{cases}$$

于是  $g(z) \in H(B(0, R)) \cap C(\overline{B(0, R)})$ , 用第四题结论可得  $g(z)$  的最大模单调递增。即  $f(z)$  的最大模单调递减。  $\square$

7. 设  $f$  是域  $D$  上非常数的全纯函数. 证明: 若  $f$  在  $D$  中没有零点, 则  $|f(z)|$  在  $D$  内不能取得最小值.

证明. 反证法, 如果 $|f(z)|$ 没有零点且取得最小值 $\Leftrightarrow \frac{1}{|f(z)|}$ 在 $D$ 内部取得最大值. 由最大模原理,  $f(z)$ 恒为常数. 这是矛盾.  $\square$

8. 设 $f \in H(B(0, 1))$ ,  $f(0) = 0$ . 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ 在 $B(0, 1)$ 上绝对且内闭一致收敛.

证明. 在任意的紧集 $K \subset D$ 上, 显然 $|f(z)| \leq M$ , 于是利用第十题可得

$$|f(z)| \leq M|z|$$

于是

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f(z^n) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f(z^n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M|z|^n = \frac{M|z|}{1-|z|} < \infty \quad \square$$

9. (全纯函数的Hadamard三圆定理) 设 $0 < r_1 < r_2 < \infty$ ,  $D = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$ ,  $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$ ,  $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$  ( $r_1 \leq r \leq r_2$ ). 证明:  $\log M(r)$ 在 $[r_1, r_2]$ 上是 $\log r$ 的凸函数, 即

$$\log M(r) \leq \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_1) + \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_2).$$

证明. (参考[15] $P_{22} \sim P_{25}$ ) 注意到通过作 $z = e^w$ 变换,  $D$ 与 $\{w | \ln a < \operatorname{Re} w < \ln b\}$ 建立了映射, 于是 $\mathfrak{M}(u) = M(e^u)$ , 只需证明 $\ln \mathfrak{M}(u)$ 是 $u$ 在 $(\ln a, \ln b)$ 内的凸函数, 即以下的

**定理 4.5.1 (三直线定理).** 设实数 $a < b$ ,  $D = \{z | a < \operatorname{Re} z < b\}$ . 设 $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 在 $D$ 内有界解析, 且不恒为0. 令

$$M(x) = \sup\{|f(x+iy)| | -\infty < y < \infty\},$$

则 $\ln M(x)$ 是 $x$ 的凸函数.

证明. 待定 $\alpha \in \mathbb{R}$ , 于是

$$\varphi(z) = e^{\alpha z} f(z)$$

有界解析且不恒为0, 利用无界域的最大模原理, 有

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), \forall x_3 \in (x_1, x_2), \quad |\varphi(x+iy)| \leq \max\{e^{\alpha x_i} M(x_i)\}. \quad i = 1, 2$$

选取 $\alpha$ 使得

$$e^{\alpha x_1} M(x_1) = e^{\alpha x_2} M(x_2)$$

解之, 得到

$$\alpha = \frac{\ln M(x_1) - \ln M(x_2)}{x_2 - x_1}$$

代入上式整理得

$$\ln M(x_3) \leq \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} \ln M(x_1) + \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \ln M(x_2) \quad \square$$

作  $F(w) = f(e^w)$  即可。下面介绍

**定理 4.5.2 (无界域的最大模原理).** 设  $D \subset \mathbb{C}$  是一个区域, 且  $f(z)$  在  $D$  上解析, 如果存在  $M > 0$ , 使得对任意的  $a \in \partial_\infty D$ <sup>3</sup>,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(z)| \leq M (z \in D)$ , 则

$$\forall z \in D, |f(z)| \leq M$$

证明略去, 参考[15]P<sub>19</sub>. □

10. 设  $f \in H(B(0, R)), f(B(0, R)) \subset B(0, M), f(0) = 0$ . 证明:

(i)  $|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z|, |f'(0)| \leq \frac{M}{R}, \forall z \in B(0, R) \setminus \{0\}$ ; (ii) 等号成立当且仅当  $f(z) = \frac{M}{R}e^{i\theta}z$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ).

证明. (i): 设  $f(z) = zg(z), g(0) = f'(0) = a_1$ , 取  $|z| = r \in (0, R)$ , 则

$$|g(z)| \leq \frac{M}{r}$$

由最大模原理, 在  $B(0, r)$  中都有上式成立, 令  $r \rightarrow R$  即可。

且

$$|f'(0)| = \left| \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} \right| = \lim_{z \rightarrow 0} |g(z)| \leq \frac{M}{R}$$

(ii): 取等时当且仅当

$$g(z) = \frac{M}{R}e^{i\theta}$$

化简即得. □

11. 设  $f \in H(B(0, 1)), f(0) = 0$ , 并且存在  $A > 0$ , 使得  $\operatorname{Re} f(z) \leq A, \forall z \in B(0, 1)$ . 证明:

$$|f(z)| \leq \frac{2A|z|}{1 - |z|}, \forall z \in B(0, 1).$$

证明. 构造

$$g(z) = \frac{f(z)}{f(z) - 2A}$$

不难验证

$$g(0) = 0, \quad |g(z)| \leq 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} f(z) \leq A$$

于是由Schwarz引理

$$|z| \geq |g(z)| \geq \frac{|f(z)|}{|f(z)| + 2A}$$

解之即证. □

<sup>3</sup>当  $D$  是有界域时,  $\partial_\infty D = \partial D$ , 当  $D$  是无界域时,  $\partial_\infty D = \partial D \cup \{\infty\}$

注 4.5.1. 如果题目条件改为  $f \in H(B(0, R))$ , 作  $f(Rz)$  变换, 则不难证明

$$|f(z)| \leq \frac{2A|z|}{R-|z|}$$

12. (Carathéodory不等式) 设  $f \in H(B(0, R)) \cap C(\overline{B(0, R)})$ ,  $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ ,  $A(r) = \max_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z)$  ( $0 \leq r \leq R$ ). 证明:

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|, \quad \forall r \in [0, R).$$

证明. 如果  $f(0) = 0$ , 这就是上一题, 而不为0时, 考虑

$$g(z) = f(z) - f(0)$$

利用  $\operatorname{Re}$  的线性性质, 有(调和函数的极值原理)

$$\operatorname{Re} g(z) = \operatorname{Re} (f(z) - f(0)) = \operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(0) \leq A(R) - \operatorname{Re} f(0)$$

此时  $g(z)$  满足上题推论, 即

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |f(0)| + |f(z) - f(0)| \\ &= |f(0)| + \frac{2|z|}{R-|z|} (A(R) - \operatorname{Re} f(0)) \\ &\leq |f(0)| + \frac{2|z|}{R-|z|} (A(R) + |f(0)|) \\ &= \frac{2|z|}{R-|z|} A(R) + \frac{R+|z|}{R-|z|} |f(0)| \end{aligned}$$

当  $|z| = r$  时, 对两侧取  $\max$ , 并由  $r$  的任意性. 不难得到

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|, \quad \forall r \in [0, R). \quad \square$$

13. 设  $f \in H(B(0, 1))$ ,  $f(0) = 1$ , 并且  $\operatorname{Re} f(z) \geq 0, \forall z \in B(0, 1)$ . 利用Schwarz引理证明:

(i)  $\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \operatorname{Re} f(z) \leq |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}, \forall z \in B(0, 1)$ ; (ii) 等号在  $z$  异于零时成立, 当且仅当

$$f(z) = \frac{1 + e^{i\theta}z}{1 - e^{i\theta}z} \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

证明. (i): 类似4.3节的第七题, 构造  $g(z) = \frac{1-f(z)}{1+f(z)}$ , 验证

$$g(0) = 0, |g(z)| \leq 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} g(z) > 0$$

利用Schwarz引理

$$|g(z)| \leq |z|$$

化简即证 $RHS$ 。

关于 $LHS$ ，考虑证明

$$\left| \frac{1-f(z)}{f(z)+1} \right| \geq \left| \frac{1-\operatorname{Re} f(z)}{1+\operatorname{Re} f(z)} \right|$$

平方，移项只需证明

$$\begin{aligned} & \frac{|f(z)|^2 + 1 - 2\operatorname{Re} f(z)}{(\operatorname{Re} f(z))^2 + 1 - 2\operatorname{Re} f(z)} - \frac{|f(z)|^2 + 1 + 2\operatorname{Re} f(z)}{(\operatorname{Re} f(z))^2 + 1 + 2\operatorname{Re} f(z)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \left( |f|^2 - (\operatorname{Re} f(z))^2 \right) \left( \frac{1}{(\operatorname{Re} f(z) - 1)^2} - \frac{1}{(\operatorname{Re} f(z) + 1)^2} \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{4\operatorname{Re} f(z)(|f|^2 - (\operatorname{Re} f(z))^2)}{(\operatorname{Re} f(z) - 1)^2(\operatorname{Re} f(z) + 1)^2} \geq 0 \end{aligned}$$

类似 $f(z)$ ，即证。

(ii):显然取等时有

$$\frac{1-f(z)}{1+f(z)} = e^{i\theta} z$$

反解出 $f(z)$ 即可，反之容易验证成立。  $\square$

14. 设 $f \in H(B(0, 1))$ . 证明: 存在 $z_0 \in \partial B(0, 1)$ 和收敛于 $z_0$ 的点列 $\{z_n\}$ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$ 存在.

证明. 利用Bolzano-Weierstrass定理, 只需要证明对所有收敛到 $z_0$ 的 $z_n$ 都有,

$$|f(z_n)| \leq M$$

不妨设 $f(z)$ 不为常值函数, 否则显然成立. 考虑反证, 如果

$$\forall z_0 \in \partial B(0, 1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0, \quad |f(z_n)| > M$$

由于极限是局部性质, 对于每一个 $z_0$ , 我们都可以选取 $B(z_0, \delta) \supset \{z_n\}_{n=N}^\infty$ , 而 $\partial B(0, 1)$ 显然为紧集, 可以利用有限覆盖取出有限个小球并记作 $B(z_{0k}, \delta_k)$ . 此时可取 $\min_{1 \leq k \leq n} \delta_k = \delta$ , 于是

$$\forall z_n \in \partial B(0, 1) \cap \bigcup_{k=1}^n B(z_{0k}, \delta), \quad |f(z_n)| > M$$

显然

$$\bigcup_{k=1}^n B(z_{0k}, \delta) \setminus B(0, 1)^c \subset B(0, 1)$$

由于  $f \in H(B(0, 1))$ 。注意到

$$z \in \bigcup_{k=1}^n B(z_{0k}, \delta) \setminus B(0, 1)^c \Rightarrow |f(z)| > M$$

即  $f(z)$  最大模在内部取到，即为常值函数。矛盾!  $\square$

15. 求出所有满足条件 “ $|f(z)| = 1, \forall z \in \partial B(0, 1)$ ” 的整函数.

证明. 显然在内部  $f(z)$  的零点有限，否则  $f(z)$  恒为 0，矛盾。设  $z_k, 1 \leq k \leq n$  为全部零点，考虑

$$g(z) = f(z) \prod_{k=1}^n \frac{1 - \overline{z_k} z}{z - z_k}$$

显然

$$g(z) \in H(\overline{B(0, 1)}), \quad \forall z \in \overline{B(0, 1)}, g(z) \neq 0, \quad \forall z \in \partial B(0, 1), |g(z)| = 1$$

利用最大模原理可得

$$\forall z \in \overline{B(0, 1)}, |g(z)| \leq 1, \quad \left| \frac{1}{g(z)} \right| \leq 1$$

于是

$$|g(z)| \equiv 1 \Leftrightarrow g(z) = e^{i\theta}$$

而  $f(z)$  在整个复平面上全纯，即  $z_k \equiv 0$ 。于是

$$f(z) = e^{i\theta} z^n, \quad n \geq 0, \theta \in \mathbb{R} \quad \square$$

16. 设  $P_n(z)$  是  $n$  次多项式， $P_n^*(z) = z^n P_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$ 。证明：若  $P_n(z)$  的所有零点都在  $B(\infty, 1)$  中，则  $P_n(z) + e^{i\theta} P_n^*(z)$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ) 的零点都在  $\partial B(0, 1)$  上。

证明. 我们设零点为  $z_k$ ，于是有

$$P_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k), \quad |z_k| > 1$$

于是

$$P_n(z) + e^{i\theta} P_n^*(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k) + e^{i\theta} z^n \prod_{k=1}^n \left( \frac{1}{\bar{z}} - z_k \right) = 0$$

移项化简可得

$$\prod_{k=1}^n \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z} = -e^{i\theta} \frac{z^n}{(\bar{z})^n}$$

两边取模可得

$$\prod_{k=1}^n \left| \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z} \right| = \prod_{k=1}^n \left| \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z} \right| = 1$$

注意到函数(以下默认 $|a| < 1$ )

$$\varphi_a(z) = \lambda \frac{z - a}{z - \frac{1}{\overline{a}}}$$

把 $B(0, 1)$ 映到 $B(0, 1)$ , 类似考虑

$$\psi_a(z) = \mu \frac{z - \frac{1}{\overline{a}}}{z - a}$$

把 $B(\infty, 1)$ 映到 $B(\infty, 1)$ 。

于是当且仅当

$$\forall k = 1, 2, \dots, n. \quad \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 + |z_k|^2 = 1 + |z_k|^2 |z|^2$$

于是有

$$|z|^2 - 1 = (|z|^2 - 1)|z_k|^2$$

则必有

$$|z| = 1$$

即所有满足条件的根在单位圆上。 □

17. 设 $f \in H(B(0, 1))$ ,  $f(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$ . 证明: 若 $z_1, z_2, \dots, z_n$ 是 $f$ 在 $B(0, 1)$ 中的所有彼此不同的零点, 其阶数分别为 $k_1, k_2, \dots, k_n$ , 则

$$|f(z)| \leq \prod_{j=1}^n \left| \frac{z_j - z}{1 - \overline{z_j} z} \right|^{k_j}, \forall z \in B(0, 1).$$

特别地, 有

$$|f(0)| \leq \prod_{j=1}^n |z_j|^{k_j}.$$

证明. 注意到此时

$$f(z) = \prod_{j=1}^n |z - z_j|^{k_j}$$

于是此时等价于证明

$$g(z) = \prod_{j=1}^n |1 - \overline{z_j} z|^{k_j} \leq 1$$

对 $g(z)$ 用最大模定理, 不难发现此时(在 $\partial B(0, 1)$ 上)

$$|1 - \overline{z_j} z| = |\overline{z} - \overline{z_j}| = |z - z_j|$$

于是在边界上

$$|g(z)| = |f(z)| \leq 1$$

因为此时  $f(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$ 。

□

18. 设  $f \in H(B(0, 1))$ ,  $f(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$ . 证明:

$$\frac{||f(0)| - |z||}{1 - |f(0)||z|} \leq |f(z)| \leq \frac{|f(0)| + |z|}{1 + |f(0)||z|}.$$

证明. 构造

$$g(z) = \frac{f(0) - f(z)}{1 - \overline{f(0)}f(z)}$$

验证

$$g(0) = 0, \quad |g(z)| \leq 1 \Leftrightarrow |f(0)|^2 + |f(z)|^2 \leq 1 + |f(0)f(z)|^2$$

其中可以建立一个一般的不等式

$$a^2 + b^2 \leq 1 + a^2b^2, \quad a, b \in [0, 1]$$

证明也很简单, 左右移项可得

$$a^2 - a^2b^2 = a^2(1 - b^2) \leq 1 - b^2$$

利用Schwarz引理有

$$|g(z)| \geq \frac{|f(0)| - |f(z)|}{1 - |f(0)f(z)|}, \quad \frac{|f(z)| - |f(0)|}{1 - |f(0)f(z)|}$$

其中分母是因为  $|1 - \overline{f(0)}f(z)| = 1 - |f(0)f(z)|$ 。

□

注 4.5.2. 我们这里给一个推广的Schwarz引理, 类似的可以继续推广Schwarz-Pick定理。

定理 4.5.3 (推广的Schwarz引理). 如果  $f(z)$  在单位圆内部全纯, 且在边界上  $|f(z)| \leq M$ ,  $f(0) = a$ , 我们有

$$\forall |z| < 1, \quad |f(z)| \leq M \frac{M|z| + |a|}{|a||z| + M}$$

证明. 显然  $a, |f(z)| \leq M$ , 构造

$$g(z) = \frac{M(|f(z) - a|)}{M^2 - |a|f(z)}$$

不难验证

$$g(0) = 0, \quad |g(z)| \leq 1 \Leftrightarrow (|f(z)|^2 + |a|^2)M^2 \leq M^4 + |a||f(z)|$$

类似解答中不等式, 再对  $g(z)$  用Schwarz引理即证。

□

<sup>4</sup> 本题左边不等式有误, 反例可取  $f(z) = z^2$ , 应将  $\frac{||f(0)| - |z||}{1 - |f(0)||z|}$  改为  $\frac{|f(0)| - |z|}{1 - |f(0)||z|}$ 。

19. 设  $f \in H(B(0, 1))$ ,  $f(B(0, 1)) \subset B(0, M)$ . 证明:

$$M|f'(0)| \leq M^2 - |f(0)|^2.$$

证明. 注意到不等式两边有齐次性, 通过作

$$g(z) = \frac{f(z)}{M}$$

而不妨设  $M = 1$ , 等价于证明

$$|f'(0)| \leq 1 - |f(0)|^2$$

由Schwarz-Pick定理,  $f(0) = f(0)$ , 取  $a = 0, b = f(0)$  即可.  $\square$

20. 设  $f \in H(B(0, 1))$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$ . 证明: 若存在  $z_1, z_2 \in B(0, 1)$ , 使得  $z_1 \neq z_2, |z_1| = |z_2|, f(z_1) = f(z_2)$ , 则

$$|f(z_1)| = |f(z_2)| \leq |z_1|^2 = |z_2|^2.$$

提示: 考虑  $\left(\frac{f(z_1) - f(z)}{1 - \overline{f(z_1)}f(z)}\right)\left(\frac{1 - \bar{z}_1 z}{z_1 - z}\right)\left(\frac{1 - \bar{z}_2 z}{z_2 - z}\right)$ .

证明. 利用提示, 设

$$\begin{aligned} g(z) &= \left(\frac{f(z_1) - f(z)}{1 - \overline{f(z_1)}f(z)}\right)\left(\frac{1 - \bar{z}_1 z}{z_1 - z}\right)\left(\frac{1 - \bar{z}_2 z}{z_2 - z}\right) \\ &= \frac{\varphi_{f(z_1)}(f(z))}{\varphi_{z_1}(z)\varphi_{z_2}(z)} \end{aligned}$$

容易验证

$$|g(0)| = \left|\frac{f(z_1)}{z_1 z_2}\right| = \left|\frac{f(z_1)}{z_1^2}\right|$$

对  $f(z)$  利用Schwarz引理有

$$|f(z)| \leq |z|$$

而  $f(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$ , 根据最大模原理, 即  $f(z)$  的最大值为1, 且在  $\partial B(0, 1)$  上取到。对  $g(z)$  用最大模原理, 不难看出在  $\partial B(0, 1)$  上

$$|g(z)| = 1$$

于是  $|g(z)| \leq 1$ , 自然的有

$$|g(0)| \leq 1$$

我们完成了证明.  $\square$

21. 设  $f \in H(B(0, 1))$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$ . 证明:

$$|z| \frac{||f'(0)| - |z||}{1 - |f'(0)||z|} \leq |f(z)| \leq |z| \frac{|f'(0)| + |z|}{1 + |f'(0)||z|} \quad 5.$$

证明. 考虑

$$g(z) = \frac{f(z)}{z}, \quad h(z) = \frac{g(z) - f'(0)}{1 - g(z)f'(0)}$$

不难验证

$$h(0) = 0, |h(z)| \leq 1 \Leftrightarrow g^2(z) + f'^2(z) \leq 1 + g^2(z)f'^2(z)$$

其中对  $f(z)$  用 Schwarz 引理不难得到  $|g(z)| \leq 1$ , 从而对  $h(z)$  验证条件类似第十八题。

于是

$$|z| \geq |h(z)| \geq \frac{|g(z)| - |f'(0)|}{1 + |g(z)f'(0)|}, \frac{|f'(0)| - |g(z)|}{1 + |g(z)f'(0)|}$$

对  $|g(z)|$  有第十八题相同的结论, 即证。 □

22. 设  $f \in H(B(0, 1))$ ,  $f(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$ . 证明:

$$\left| f(z) - \frac{f(0)(1 - |z|^2)}{1 - |f(0)|^2|z|^2} \right| \leq \frac{|z|(1 - |f(0)|^2)}{1 - |f(0)|^2|z|^2}.$$

证明. 注意到有恒等式

$$1 - |a|^2 = 1 - |a|^2|z|^2 - |a|^2(1 - |z|^2)$$

设  $a = f(0)$ , 要证式子化为

$$\left| f(z) - \frac{a(1 - |z|^2)}{1 - |a|^2|z|^2} \right| \leq |z| \left( 1 - \frac{|a|^2(1 - |z|^2)}{1 - |a|^2|z|^2} \right).$$

令  $a = f(0)$ , 则  $|a| < 1$ . 定义

$$g(z) = \varphi_a(f(z)) = \frac{f(z) - a}{1 - \bar{a}f(z)}.$$

由于  $f$  全纯且  $f(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$ ,  $g$  在  $B(0, 1)$  上全纯, 且  $g(0) = 0$ . 由 Schwarz 引理,  $|g(z)| \leq |z|$ . 解得

$$f(z) = \varphi_a^{-1}(g(z)) = \frac{g(z) + a}{1 + \bar{a}g(z)}.$$

令  $w = g(z)$ ,  $r = |z|$ , 则  $|w| \leq r$ . 考虑差

$$d(w) = f(z) - \frac{a(1 - r^2)}{1 - |a|^2r^2} = \frac{(1 - |a|^2)(w + ar^2)}{(1 - |a|^2r^2)(1 + \bar{a}w)}.$$

<sup>5</sup> 本题左边不等式有误, 反例可取  $f(z) = z^3$ , 应将  $\frac{||f'(0)| - |z||}{1 - |f'(0)||z|}$  改为  $\frac{|f'(0)| - |z|}{1 - |f'(0)||z|}$ .

即证

$$\frac{|w + ar^2|}{|1 + \bar{a}w|} \leq r.$$

等价于

$$|w + ar^2|^2 \leq r^2 |1 + \bar{a}w|^2.$$

展开计算:

$$\begin{aligned} |w|^2 + 2r^2 \operatorname{Re} a\bar{w} + |a|^2 r^4 &\leq r^2 + 2r^2 \operatorname{Re} a\bar{w} + |a|^2 r^2 |w|^2, \\ \Leftrightarrow (1 - |a|^2 r^2)(|w|^2 - r^2) &\leq 0. \end{aligned}$$

由  $|a| < 1, r < 1$  且  $|w| \leq r$ , 得证。 □

**注 4.5.3.** 另一种解法, 更加几何一点, 虽然很精彩但是不容易想到。

因为当  $f(0) = 0$  时, 这就是Schwarz引理。我们不妨  $f(0) \neq 0$ 。设  $f(0) = |f(0)|e^{i\theta}$ 。考虑函数  $\tilde{f}(z) = e^{-i\theta}f(z)$ , 则  $\tilde{f}(0) = |f(0)| > 0$ 。记  $a = |f(0)| \in (0, 1)$ 。定义分式线性变换:

$$\phi(\zeta) = \frac{a - \zeta}{1 - a\bar{\zeta}}$$

易验证  $\phi: B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$  是双全纯映射, 且  $\phi(a) = 0, \phi(0) = a$ 。令:

$$g(z) = \phi(\tilde{f}(z)) = \frac{a - \tilde{f}(z)}{1 - a\bar{\tilde{f}}(z)}$$

则  $g(0) = \phi(a) = 0$ , 且  $g(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$ 。由 Schwarz 引理:

$$|g(z)| \leq |z|, \quad \forall z \in B(0, 1)$$

即:

$$|\tilde{f}(z) - a| \leq |z| \cdot |1 - a\bar{\tilde{f}}(z)|$$

考虑圆盘  $\overline{B(0, r)}$  ( $0 < r < 1$ )。由  $|g(z)| \leq |z| \leq r$ , 得:

$$\phi(\tilde{f}(\overline{B(0, r)})) = g(\overline{B(0, r)}) \subset \overline{B(0, r)}$$

不难发现  $\phi^{-1} = \phi$ , 即

$$\tilde{f}(\overline{B(0, r)}) \subset \phi^{-1}(\overline{B(0, r)}) = \phi(\overline{B(0, r)})$$

在边界上我们有

$$\phi(r) = \frac{a - r}{1 - ar}, \quad \phi(-r) = \frac{a + r}{1 + ar}$$

注意到这些映射统统保圆, 计算此时 $\phi$ 的圆心为

$$c_r = \frac{1}{2} [\phi(-r) + \phi(r)] = \frac{1}{2} \left( \frac{a+r}{1+ar} + \frac{a-r}{1-ar} \right) = \frac{a(1-r^2)}{1-a^2r^2}$$

半径为:

$$R_r = \frac{1}{2} |\phi(r) - \phi(-r)| = \frac{1}{2} \left| \frac{a-r}{1-ar} - \frac{a+r}{1+ar} \right| = \frac{r(1-a^2)}{1-a^2r^2}$$

故:

$$\phi(\overline{B(0, r)}) = \left\{ w \in \mathbb{C} : \left| w - \frac{a(1-r^2)}{1-a^2r^2} \right| \leq \frac{r(1-a^2)}{1-a^2r^2} \right\}$$

利用 $\tilde{f}(\overline{B(0, r)}) \subset \phi(\overline{B(0, r)})$ , 即

$$\left| \tilde{f}(z) - \frac{a(1-|z|^2)}{1-a^2|z|^2} \right| \leq \frac{|z|(1-a^2)}{1-a^2|z|^2}$$

代回 $f(z)$ , 此时 $f(0) = e^{i\theta}a = e^{i\theta}|f(0)|$ , 我们有

$$\left| f(z) - \frac{f(0)(1-|z|^2)}{1-|f(0)|^2|z|^2} \right| = \left| \tilde{f}(z) - \frac{a(1-|z|^2)}{1-a^2|z|^2} \right| \leq \frac{|z|(1-a^2)}{1-a^2|z|^2} = \frac{|z|(1-|f(0)|^2)}{1-|f(0)|^2|z|^2}$$

结论得证。

23. 设 $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ , 并且将 $\mathbb{C}_\infty$ 中的圆周 $\gamma$ 仍映为圆周. 证明:  $\varphi$ 是分式线性变换.

证明.  $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{C}_\infty) \Leftrightarrow \varphi$ 是 $\mathbb{C}_\infty$ 上的单叶全纯函数。

考虑特殊情形, 如果 $\varphi(\infty) = \infty$ , 显然 $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ . 利用书本5.3节定理5.3.4可得 $\varphi$ 形如 $az+b$ .

这当然为分式线性变换. 如果 $\varphi(\infty) = c < \infty$ . 考虑

$$\psi(z) = \frac{1}{z-c}$$

于是

$$\psi \circ \varphi(\infty) = \infty \Rightarrow \psi \circ \varphi = az+b$$

即

$$\varphi(z) = \psi^{-1}(az+b) = \frac{1}{az+b} + c$$

显然也为分式线性变换。 □

注 4.5.4. 参看书本定理5.3.4和定理5.3.5。

24. 求出上半平面 $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ 的全纯自同构群 $\text{Aut}(\mathbb{C}^+)$ .

证明. 考虑利用上一题结论, 设 $\varphi(z)$ 为分式线性变换. 于是把上半平面映到上半平面, 且把实轴映到实轴. 设

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

于是当 $z = x \in \mathbb{R}$ , 可以推得 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . 设 $z = x + iy$ , 暴力计算得

$$\varphi(z) = \frac{(ax + b)(cx + d) - acy^2}{(cx + d)^2 + c^2y^2} + i \frac{y(ad - bc)}{(cx + d)^2 + c^2y^2}$$

于是为了满足将上半平面映为上半平面, 需满足 $y > 0, y(ad - bc) > 0$ . 即

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc > 0 \quad \square$$

25. 设 $\varphi$ 将 $B(0, 1)$ 双全纯地映为域 $D$ ,  $\psi$ 将 $B(0, 1)$ 双全纯地映为域 $G$ . 证明: 若 $f: D \rightarrow G$ 是全纯映射,  $f(\varphi(0)) = \psi(0)$ , 则 $f[\varphi(B(0, r))] \subset \psi(B(0, r))$  ( $0 < r < 1$ ).

证明. 设

$$g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$$

不难验证

$$g(B(0, 1)) = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi(B(0, 1)) = \psi^{-1} \circ f(D) = \psi^{-1}(G) = B(0, 1)$$

且(因 $\varphi, \psi$ 双全纯)

$$g(0) = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi(0) = \psi^{-1} \circ \psi(0) = 0$$

由Schwarz引理

$$|g(z)| \leq |z| \Rightarrow f[\varphi(B(0, r))] \subset \psi(B(0, r)) \quad \square$$

26. 设 $f \in H(B(0, 1))$ ,  $f(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$ . 证明:

$$|f(z) - f(0)| \leq |z| \frac{1 - |f(0)|^2}{1 - |f(0)||z|}.$$

证明. 考虑构造

$$g(z) = \frac{f(z) - f(0)}{1 - \overline{f(0)}f(z)}$$

则类似第八题验证满足Schwarz引理条件, 利用

$$|z| \geq |g(z)| \geq \frac{|f(z)| - |f(0)|}{|f(0)f(z) - |f(0)|^2| + 1 - |f(0)|^2}$$

解之即证. □

27. 设 $D$ 是以原点 $O$ 为中心、以 $z_1, z_2, z_3, z_4$ 为顶点的正方形域,  $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$ ,  $M$ 是 $|f(z)|$ 在 $\bar{D}$ 上的最大值,  $m$ 是 $|f(z)|$ 在线段 $[z_1, z_2]$ 上的最大值. 证明: (i)  $|f(0)| \leq m^{\frac{1}{4}} M^{\frac{3}{4}}$ ; (ii) 在闭三角形 $\triangle Oz_1 z_2$ 上也有 $|f(z)| \leq m^{\frac{1}{4}} M^{\frac{3}{4}}$ .

证明. (i): 考虑构造

$$g(z) = f(z)f(ze^{i\frac{\pi}{2}})f(ze^{i\pi})f(ze^{i\frac{3\pi}{2}})$$

由于对称性, 不妨设 $z \in [z_1, z_2]$ 且 $[z_1, z_2]$ 垂直正实半轴, 并设 $z_k = x_k + iy_k$ . 利用全纯函数的平均值性质, 有

$$\begin{aligned} |g(0)| &= |f(0)|^4 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta \in \partial D} \left| \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right| \\ &\leq mM^3 \frac{4}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= mM^3 \end{aligned}$$

(ii): 因为 $m = M$ 时平凡, 下设二者不等. 反证, 如果在闭三角形 $\triangle Oz_1 z_2$ 上

$$|f(z)| > m^{\frac{1}{4}} M^{\frac{3}{4}}.$$

则在 $[z_1, z_2]$ 上, 有 $m > m^{\frac{1}{4}} M^{\frac{3}{4}}$ , 而在内部 $M > m^{\frac{1}{4}} M^{\frac{3}{4}}$ , 这是一个矛盾!  $\square$

注 4.5.5. 这一题的背景是调和测度, 利用两常数定理可以迅速得到答案. 读者可参看[15] $P_{106}$ , 本书 $P_{322}$ , 我们给出以下定理并略去证明。

定义 4.5.1. 给定区域 $G$ , 并设其Dirichlet问题有解. 设 $\partial G$ 的子集 $E$ 由有限条弧段组成, 设 $\omega(z, E, G)$ 是以函数

$$f(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta \in E \\ 0, & \zeta \in \partial G \setminus E \end{cases}$$

为边值的 $G$ 中Dirichlet问题的解, 即 $\omega(z, E, G)$ 调和且对 $f$ 的任一连续点 $\zeta$ 有

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \omega(z, E, G) = f(\zeta)$$

则 $\omega(z, E, G)$ 称为 $E$ 对于区域 $G$ 在点 $z$ 的调和测度。

调和测度有许多性质, 例如关于 $E$ 的分离可加性(相加之和为1), 共形映射的保持性, 以及两常数定理。

如果 $G$ 关于原点对称, 那么其调和测度分布也具有对称性. 下面来介绍一个定理, 读者可参看[15] $P_{109}$ 。

定理 4.5.4. 设  $G$  有界, 边界和  $E$  定义如上, 设  $f(z)$  在  $\overline{G}$  上全纯, 且

$$|f(z)| \leq \begin{cases} M_1 < \infty, & z \in E \\ M_2 < \infty, & z \in \partial G \setminus E \end{cases}$$

则  $\forall z \in \overline{G}$ , 有

$$\ln |f(z)| \leq \omega(z, E, G) \ln M_1 + (1 - \omega(z, E, G)) \ln M_2$$

证明略去。

28. 设  $D$  是下面所述的域,  $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$ , 并且在  $\overline{D}$  上有界. 证明:

(i) 若  $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ ,  $\lim_{\substack{\operatorname{Re} z \rightarrow \infty \\ \operatorname{Im} z = 0}} f(z) = A$ , 则

$$\lim_{\substack{\operatorname{Re} z \rightarrow \infty \\ 0 \leq \operatorname{Im} z \leq r}} f(z) = A \quad (0 < r < 1);$$

(ii) 若  $D = \{z \in \mathbb{C} : \theta_1 < \arg z < \theta_2\} \quad (-\pi < \theta_1 < \theta_2 < \pi)$ ,  $\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ \arg z = \theta_1}} f(z) = A$ , 则

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2}} f(z) = A \quad (\theta_1 < \theta < \theta_2);$$

(iii)  $D = \{z \in \mathbb{C} : \theta_1 < \arg z < \theta_2\} \quad (-\pi < \theta_1 < \theta_2 < \pi)$ ,  $\lim_{\substack{|z| \rightarrow 0 \\ \arg z = \theta_1}} f(z) = A$ , 则

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow 0 \\ \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2}} f(z) = A \quad (\theta_1 < \theta < \theta_2).$$

证明. 通过作  $\operatorname{Log} z$  和平移变换不难看出(ii)与(i)等价, 通过作  $\frac{1}{z}$  变换不难看出(ii)与(iii)等价, 于是我们只需证明(i)。

$\forall \varepsilon > 0$ , 取

$$g(z) = \frac{f(z)}{e^{\varepsilon z^2}}$$

当  $z = x + iy_0$  时 ( $y_0 = \{0, 1\}$ ), 利用条件有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |g(z)| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(z)|}{e^{\varepsilon(x^2 - y_0^2)}} \leq A e^{\varepsilon y_0^2}$$

而  $f(z)$  在  $D$  内有界, 于是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |g(z)| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(z)|}{e^{\varepsilon(x^2 - y_0^2)}} \leq A e^{\varepsilon y_0^2}$$

由无界域的最大模原理,  $\forall z = x + iy \in D, |g(z)| \leq Ae^{\varepsilon y_0^2}$ , 即

$$|f(z)| \leq Ae^{\varepsilon(y_0^2 + x^2 - y^2)}$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 即证。 □

注 4.5.6. 类似的可得以下定理

定理 4.5.5. 设  $f(z)$  在  $D = \{z | x_1 < \operatorname{Re} z < x_2\}$  内全纯有界, 且  $x_1, x_2 < \infty$ 。如果  $\forall a \in \{z | \operatorname{Re} z = x_1 \text{ 或 } x_2\}, \lim_{z \rightarrow a} f(z) \leq M$  ( $z \in D$ ), 则  $\forall z \in D, |f(z)| \leq M$ 。

证明. 考虑  $g(z) = e^{\varepsilon z^2} f(z)$ , 类似上述证明即可。 □

我们还有以下推广的定理

定理 4.5.6 (Lindelöf 定理). 设函数  $f$  及  $\varphi$  在区域  $D$  内解析, 而且  $\varphi$  在  $D$  内有界且无零点。如果正数  $M$  及  $\partial_\infty D = A \cup B$  满足下列条件:

1.  $\forall a \in A, \lim_{z \rightarrow a} |f(z)| \leq M$ ;
2.  $\forall b \in B, \forall \eta > 0, \lim_{z \rightarrow b} |f(z)| |\varphi(z)|^\eta \leq M$ ,

那么  $\forall z \in D, |f(z)| \leq M$ 。

定理 4.5.7 (Phragmén 定理). 设  $a \geq \frac{1}{2}$ , 并且令

$$D = \left\{ z : \left| \arg z \right| < \frac{\pi}{2a} \right\}.$$

设  $f$  在  $D$  内解析, 并且有正的常数  $M, P$  及  $b (< a)$ , 使得对于  $z \in D$  及  $\forall w \in \partial D$ ,

$$\lim_{z \rightarrow w} |f(z)| \leq M,$$

而且对于  $z \in D$ , 当  $|z|$  充分大时,

$$|f(z)| \leq Pe^{|z|^b},$$

那么  $\forall z \in D, |f(z)| \leq M$ 。

证明略去, 参见 [15]P<sub>19</sub>。

29. 设  $D$  是有界域,  $f \in H(D), z_0 \in D$ . 证明: 若  $f(z_0) = z_0, f(D) \subset D, f'(z_0) = 1$ , 则  $f(z) \equiv z$ .

证明. 由于平移性我们不妨设  $z_0 = 0$ , 否则作  $z - z_0$  即可. 因为  $f \in H(D)$ ,  $z_0 \in D$ . 而  $f(0) = 0, f'(0) = 1$ , 显然作Laurent展开有

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k, \quad z \in B(0, \delta)$$

反证, 结论不成立, 此时  $\exists n \geq 2, s.t. a_n \neq 0$ , 我们取

$$m = \min\{n | a_n \neq 0\}$$

定义  $f_N(z) = f_{N-1} \circ f(z), f_1(z) = f(z)$ , 于是

$$f(z) = z + a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \cdots, \Rightarrow f_N(z) = z + N a_m z^m + \cdots, \quad z \in B(0, \delta)$$

而显然  $f_N(z) \subset D$ , 于是  $\exists M > 0, s.t. |f_N(z)| \leq M$ . 利用4.3小节第六题的注4.3.1可得

$$\begin{aligned} |N a_m| &= \left| \frac{1}{2\pi r^m} \int_0^{2\pi} f_N(re^{i\theta}) e^{-im\theta} d\theta \right| \\ &\leq \frac{M}{2\pi r^m} \int_0^{2\pi} |e^{-im\theta}| d\theta \\ &= \frac{M}{r^m} \end{aligned}$$

即

$$|a_m| \leq \frac{M}{N r^m}$$

固定住  $r > 0$ , 不停复合, 即令  $N \rightarrow \infty$  可知  $a_m = 0$ , 这是一个矛盾! □

30. 设  $f \in H(B(0, 1)), f(0) = 0$ , 并且  $|\operatorname{Re} f(z)| < 1, \forall z \in B(0, 1)$ . 证明:

$$(i) |\operatorname{Re} f(z)| \leq \frac{4}{\pi} \arctan |z|, \forall z \in B(0, 1); \quad (ii) |\operatorname{Im} f(z)| \leq \frac{2}{\pi} \log \left( \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right), \forall z \in B(0, 1).$$

证明. (i): 等价于证明

$$\tan \frac{\pi}{4} |\operatorname{Re} f(z)| \leq |z|$$

设

$$g(z) = \tan \frac{\pi}{4} |\operatorname{Re} f(z)|$$

不难验证

$$g(0) = 0, \quad |g(z)| < \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

用Schwarz引理即证。

(ii): 化简等价于证明

$$h(z) := \frac{e^{\frac{\pi}{2} |\operatorname{Im} f(z)|} - 1}{e^{\frac{\pi}{2} |\operatorname{Im} f(z)|} + 1} \leq |z|$$

不难验证

$$h(0) = 0, \quad |h(z)| = h(z) \leq 1$$

用Schwarz引理即证。  $\square$

31. 设 $f$ 在 $B(0, 1) \cup \{1\}$ 上全纯,  $f(0) = 0, f(1) = 1, f(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$ . 证明:  $f'(1) \geq 1$ .

证明. 注意到

$$B(0, 1) \subset B(0, 1) \cup \{1\} \subset \overline{B(0, 1)}$$

利用Schwarz引理,  $|f(z)| \leq |z|, \forall z \in B(0, 1)$ . 此时 $\forall r \in (0, 1)$ , 我们有

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(r) - f(1)}{r - 1} \right| &= \left| \frac{f(r) - 1}{r - 1} \right| \\ &\geq \frac{1 - |f(r)|}{1 - r} \\ &\geq \frac{1 - |r|}{1 - r} \\ &= 1 \end{aligned}$$

令 $r \rightarrow 1^-$ 即证明 $|f'(1)| \geq 1$ .

最后利用2.3节的第三题可以得到 $\arg f'(1) = 0$ , 于是 $|f'(1)| = f'(1)$ .  $\square$

注 4.5.7. 原来那道看起来与2.3节丝毫无关的题目是在为这题做准备, 着实让我大吃一惊。

32. 设 $P$ 是一个 $k$ 次多项式, 在单位圆周上满足 $|P(e^{i\theta})| \leq 1$ . 证明: 对任意单位圆盘外的 $z$ , 有

$$|P(z)| \leq |z|^k.$$

证明. 考虑 $P(z) = \sum_{i=0}^k a_i z^i$ , 只需要证明

$$\forall |z| > 1, \frac{|P(z)|}{|z|^k} \leq 1$$

这等价于

$$\left| a_0 \left( \frac{1}{z} \right)^k + \cdots + a_k \right| \leq 1$$

定义多项式 $\widetilde{P}(z) = a_0 z^k + \cdots + a_k$ , 则只需证明

$$\forall |z| < 1, |\widetilde{P}(z)| \leq 1$$

考虑在边界上用最大模原理，此时

$$\widetilde{P}(e^{i\theta}) = |P(e^{i\theta})| \leq 1$$

即证。 □



## 第5章 全纯函数的Laurent展开及其应用

### 5.1 全纯函数的Laurent展开

1. 下列初等函数能否在指定的域 $D$ 上展开为Laurent级数?

- |                                                                               |                                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (i) $\cos \frac{1}{z}, D = B(0, \infty) \setminus \{0\}$                      | (ii) $\tan z, D = B(\infty, R), R > 0$                                                              |
| (iii) $\operatorname{Log} \frac{z-1}{z-2}, D = B(\infty, 2)$                  | (iv) $\frac{z^2}{\sin \frac{1}{z}}, D = B(0, r) \setminus \{0\}, r > 0$                             |
| (v) $\operatorname{Log} \frac{1}{z-1}, D = B(1, \infty) \setminus \{1\}$      | (vi) $\sqrt[3]{(z-1)(z-2)(z-3)}, D = B(\infty, 3)$                                                  |
| (vii) $\sqrt{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}, D = B(0, 2) \setminus \overline{B(0, 1)}$ | (viii) $\operatorname{Log} \frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-5)}, D = B(0, 3) \setminus \overline{B(0, 2)}$ |

证明. 利用定理5.1.2. 我们只需要判断 $f(z)$ 是否在区域中全纯即可。

(i): 不难看出函数的奇点为 $z = 0 \notin D$ , 即可以展成Laurent级数。

(ii): 奇点为 $z = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}, \exists z \in D$ , 即不可以展成Laurent级数。

(iii): 奇点为 $z = 1, 2 \notin D = \{z \mid |z| > 2\}$ , 即可以展成Laurent级数。

(iv): 奇点为 $z = 0, \frac{1}{2n\pi} \in D$ , 即不可以展成Laurent级数。

(v): 奇点为 $z = 1 \notin D, \infty \in D$ , 即不可以展成Laurent级数。

(vi): 原式为

$$e^{\frac{1}{3} \operatorname{Log}(z-1)(z-2)(z-3)}$$

即奇点为 $z = 1, 2, 3 \notin D$ , 且显然可以在域上分出单值全纯分支, 即可以展成Laurent级数。

(vii): 类似的

$$e^{\frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{z}{(z-1)(z-2)}}$$

奇点为 $z = 0, 1, 2 \notin D$ , 且显然可以在域上分出单值全纯分支, 即可以展成Laurent级数。

(viii): 奇点为 $z = 1, 2, 3, 5 \notin D$ , 且显然可以在域上分出单值全纯分支, 即可以展成Laurent级数。  $\square$

2. 将下列初等函数在指定的域 $D$ 上展开为Laurent级数:

- (i)  $\frac{1}{z^2(z-1)}, D = B(1, 1) \setminus \{1\}$  (ii)  $\frac{1}{(z-1)(z-2)}, D = B(0, 2) \setminus \overline{B(0, 1)}$   
 (iii)  $\text{Log}\left(\frac{z-1}{z-2}\right), D = B(\infty, 2)$  (iv)  $\sqrt{(z-1)(z-2)}, D = B(\infty, 2)$   
 (v)  $\frac{1}{(z-5)^n}, n \in \mathbb{N}, D = B(\infty, 5)$  (vi)  $\sin \frac{z}{1-z}, D = B(1, \infty) \setminus \{1\}$   
 (vii)  $\sqrt{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}, D = B(0, 2) \setminus \overline{B(0, 1)}$  (viii)  $e^{\frac{1}{1-z}}, D = B(\infty, 1).$

为了行文严谨, 我们先定义广义组合数, 以下皆视为广义意义下

**定义 5.1.1 (广义组合数).** 我们定义广义组合数为

$$C_{\alpha}^n = \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, n = 1, 2, \dots$$

其中  $C_{\alpha}^0 = 1$ 。更一般的有

$$C_{\alpha}^{\beta} = \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}$$

这里  $\Gamma(x)$  为 *Gamma* 函数。

证明. (i): 因为

$$\frac{1}{(1+z)^2} = -\left(\frac{1}{1+z}\right)', \quad \frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)'$$

我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2(z-1)} &= \frac{1}{(1+z-1)^2(z-1)} \\ &= \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} C_{-2}^n (z-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{-2}^n (z-1)^{n-1} \end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2(z-1)} &= \frac{1}{(1+z-1)^2(z-1)} \\ &= \frac{1}{z-1} (-1) \left( \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n-2} (z-1)^{n-2} \end{aligned}$$

读者不难验证二者等价。

(ii):此时

$$\left| \frac{1}{z} \right|, \left| \frac{z}{2} \right| < 1$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-2)(z-1)} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{z}{2}-1} - \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z}{2} \right)^k - \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{z} \right)^k \end{aligned}$$

(iii):此时

$$\left| \frac{1}{z} \right| < \left| \frac{2}{z} \right| < 1$$

即

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} \frac{z-1}{z-2} &= \operatorname{Log} \frac{1-\frac{1}{z}}{1-\frac{2}{z}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n-1} \left( \frac{-1}{z} \right)^n}{n} - \frac{(-1)^{n-1} \left( \frac{-2}{z} \right)^n}{n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{n} \frac{1}{z^n} \end{aligned}$$

(iv):

$$\begin{aligned} \sqrt{(z-1)(z-2)} &= z \sqrt{\left( 1 - \frac{1}{z} \right) \left( 1 - \frac{2}{z} \right)} \\ &= z \sum_{k=0}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^k \left( -\frac{1}{z} \right)^k \sum_{k=0}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^k \left( -\frac{2}{z} \right)^k \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} 2^n (-1)^{m+n} C_{\frac{1}{2}}^n C_{\frac{1}{2}}^m z^{1-n-m} \end{aligned}$$

(v):

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-5)^n} &= \frac{1}{z^n} \frac{1}{\left( 1 - \frac{5}{z} \right)^n} \\ &= \frac{1}{z^n} \sum_{k=0}^{\infty} C_{-n}^k \left( -\frac{5}{z} \right)^k \end{aligned}$$

(vi):

$$\begin{aligned}
\sin \frac{z}{1-z} &= \sin \left( 1 + \frac{1}{z-1} \right) \\
&= \sin 1 \cos \frac{1}{z-1} + \cos 1 \sin \frac{1}{z-1} \\
&= \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}} + \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}
\end{aligned}$$

(vii):

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{z}{(z-1)(z-2)}} &= \sqrt{\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(\frac{z}{2}-1\right)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{-1}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{z}}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{z}{2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}i} \sum_{k=0}^{\infty} C_{-\frac{1}{2}}^k \left(-\frac{1}{z}\right)^k \sum_{k=0}^{\infty} C_{-\frac{1}{2}}^k \left(-\frac{z}{2}\right)^k \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}i} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{2^n} C_{-\frac{1}{2}}^m C_{-\frac{1}{2}}^m z^{n-m}
\end{aligned}$$

(viii):

$$\begin{aligned}
e^{\frac{1}{1-z}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(1-z)^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} C_{-n}^m (-z)^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{-n}^m (-1)^m}{n!} z^m
\end{aligned}$$

□

3. 将  $e^{\frac{z}{2}}(\zeta - \frac{1}{\zeta})$  作为  $\zeta$  的函数在  $B(0, \infty) \setminus \{0\}$  上展开为Laurent级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) \zeta^n,$$

称  $J_n(z)$  ( $n \geq 0$ ) 为Bessel函数. 证明:

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - z \sin \theta) d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}, n \geq 0.$$

证明. 考虑利用通项表达式, 作 $\zeta = re^{i\theta}$ , 并取 $r = 1$ 可得

$$\begin{aligned}
 J_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta)^{n+1}} d\zeta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{z}{2}(2i \sin \theta)}}{e^{in\theta}} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(z \sin \theta - n\theta)} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(z \sin \theta - n\theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - z \sin \theta) d\theta
 \end{aligned}$$

其中最后一步因为周期性换元, 倒数第二步是因为有

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \sin(z \sin \theta - n\theta) d\theta &= \int_0^\pi \sin(z \sin \theta - n\theta) d\theta + \int_\pi^{2\pi} \sin(z \sin \theta - n\theta) d\theta \\
 &= \int_0^\pi \sin(z \sin \theta - n\theta) d\theta + \int_{-\pi}^0 \sin(z \sin \theta - n\theta + 2n\pi) d\theta \\
 &= \int_0^\pi \sin(z \sin \theta - n\theta) d\theta - \int_\pi^0 \sin(-z \sin \theta + n\theta) d\theta \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

以另一种视角来看就是直接展开

$$e^{\frac{z}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{z}{2}\zeta)^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{z}{2}\frac{1}{\zeta})^n}{n!}$$

考虑第 $\zeta^n$ 项, 容易看到如果从第二个级数里取出 $\zeta^k$ , 则必定要从第一个级数中取出 $\zeta^{n+k}$ , 且 $n$ 取值从 $-\infty$ 到 $\infty$ , 因为对称性不妨设 $k \geq 0$ . 于是

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{z}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{z}{2}\zeta)^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{z}{2}\frac{1}{\zeta})^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{z}{2}\zeta)^{n+k}}{(n+k)!} \frac{(-1)^k (\frac{z}{2}\frac{1}{\zeta})^k}{k!} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} \zeta^n
 \end{aligned}$$

□

注 5.1.1. 关于Bessel函数的性质可以参看[此篇文章](#)。

注 5.1.2. 如果是一般的  $z = \rho e^{i\theta}$  的情形, 不难验证为

$$\frac{1}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} \cosh\left(\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cos \theta\right) \cos\left(\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \sin \theta - n\theta\right) d\theta$$

我没有想到不妨取  $\rho = 1$  的情形。

4. 设  $0 < r < R < \infty$ ,  $D = B(0, R) \setminus \overline{B(0, r)}$ . 证明: 若  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$  双全纯地将  $D$  映为域  $G$ , 则  $G$  的面积为

$$\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n |a_n|^2 (R^{2n} - r^{2n}).$$

证明. 显然利用 4.2 节第十题, 双全纯蕴含单叶, 于是分别把

$$A = \{z \mid |z| < r\}, \quad B = \{z \mid |z| < R\}$$

映为域  $G_1, G_2$ , 显然

$$D = B \setminus A, \quad G = G_2 \setminus G_1$$

于是  $G$  面积为题中表达式。 □

注 5.1.3. 或者直接计算 (作  $z = \rho e^{i\theta}$ ), 其中  $\rho$  的积分区域从  $r$  到  $R$  即可。

5. 证明 (面积原理): 若  $f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  是  $B(0, 1) \setminus \{0\}$  上的双全纯映射, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \leq 1.$$

证明. 参考 [1]  $P_{227}$ , 14.10  $\mathcal{S}$  类. 不妨设  $a_1 \in \mathbb{R}$ , 否则用  $\lambda f(\lambda z)$  代替  $f(z)$ ,  $|\lambda| = 1$ . 设

$$f = u + iv = \frac{1}{z} + a_1 z + \varphi(z)$$

并记

$$A = \frac{1}{r} + a_1 r, \quad B = \frac{1}{r} - a_1 r$$

当  $z = re^{i\theta}$  时, 不难得到

$$u = A \cos \theta + \operatorname{Re} \varphi(z), \quad v = -B \sin \theta + \operatorname{Im} \varphi$$

在上式中分别除以  $A, B$  可得

$$\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} = 1 + \frac{2 \cos \theta}{A} \operatorname{Re} \varphi(z) + \left(\frac{\operatorname{Re} \varphi}{A}\right)^2 - \frac{2 \sin \theta}{B} \operatorname{Im} \varphi + \left(\frac{\operatorname{Im} \varphi(z)}{B}\right)^2$$

注意到 $\varphi(z)$ 至少有二阶零点, 于是

$$\exists \eta, \varepsilon > 0, \text{ s.t. } \forall |r| < \varepsilon, \frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} < 1 + \eta r^3$$

此时 $f(\partial B(0, r)) \subset E(r)$ , 其中

$$E(r) = \left\{ (x, y) \left| \frac{x^2}{A^2(1 + \eta r^3)} + \frac{y^2}{B^2(1 + \eta r^3)} \leq 1 \right. \right\}$$

利用面积可得

$$\begin{aligned} \pi AB(1 + \eta r^3) &= \pi \left( \frac{1}{r} + a_1 r \right) \left( \frac{1}{r} - a_1 r \right) (1 + \eta r^3) \\ &\leq \frac{\pi}{r^2} (1 + \eta r^3) \end{aligned}$$

我们再设

$$V = \{z \mid r < |z| < 1\}$$

注意 $v \subset E(r)$ , 于是由2.4节第24题, 2.2节第9题可得

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{r^2} (1 + \eta r^3) &\geq \iint_V |f'|^2 \\ &= \int_r^1 t \, dt \int_0^{2\pi} \left| -\frac{1}{t^2 e^{2i\theta}} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} e^{i(n-1)\theta} \right|^2 d\theta \\ &= 2\pi \int_r^1 \left( \frac{1}{t^3} + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 t^{2n-1} \right) dt \\ &= \pi \left( \frac{1}{r^2} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 (1 - r^{2n}) \right) \end{aligned}$$

立得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 (1 - r^{2n}) \leq 1 + \eta r$$

令 $r \rightarrow 0^+$ , 即证。 □

**注 5.1.4.** 如果取 $a_i \equiv 0, i = 2, 3, \dots$ , 不难发现有 $|a_1| \leq 1$ .

6. 证明: 若 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ 是 $B(0, 1)$ 上的双全纯映射, 则 $|a_2| \leq 2$ , 并且 $|a_2| = 2$ 当且仅当 $f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta} z)^2}, \theta \in \mathbb{R}$ .

(提示: 考虑 $z \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$ 的一个双全纯分支.)

证明. 考虑

$$g(z) = z \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$$

取其一个双全纯分支, 从而不妨设

$$g^2(z) = f(z^2)$$

记  $G = \frac{1}{g}$ , 不难验证有

$$g(z) = z \left( 1 + \frac{1}{2} a_2 z^2 + \cdots \right), \quad G(z) = \frac{1}{z} - \frac{a_2}{2} z + \cdots$$

于是对  $G$  用第五题结论, 立得

$$|a_2| \leq 2$$

不难看出, 取等时当且仅当

$$G(z) = \frac{1}{z} - e^{i\theta} z$$

于是

$$f(z^2) = g^2(z) = \frac{1}{G^2(z)} = \left( \frac{z}{1 - e^{i\theta} z^2} \right)^2$$

即

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta} z)^2}$$

□

**注 5.1.5.** 我们定义  $\mathcal{S}$  类为这样的函数集合

**定义 5.1.2.** 我们称在  $B(0, 1)$  中双全纯且满足

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1$$

的所有函数的集合为  $\mathcal{S}$  类。

关于  $\mathcal{S}$  类, 我们有以下定理。

**定理 5.1.1.** 1. 如果  $f \in \mathcal{S}$ ,  $|\alpha| = 1$ , 且

$$g(z) = \bar{\alpha} f(\alpha z)$$

则

$$g \in \mathcal{S}$$

2. 如果  $f \in \mathcal{S}$ , 则

$$\exists g \in \mathcal{S}, \text{ s.t. } g^2(z) = f(z^2) \quad (\forall z \in B(0, 1))$$

证明这里略去, 参看[1]P<sub>226</sub>。

7. 证明: 若  $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$  是  $B(0, 1)$  上的双全纯映射, 则

(i)  $\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \forall z \in B(0, 1)$ ; (ii)  $\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \forall z \in B(0, 1)$ , 特别地,  $f(B(0, 1)) \supset \frac{1}{4}B(0, 1)$ . (iii) 上述不等式在异于零处成立, 当且仅当  $f(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}, \theta \in \mathbb{R}$ .

说明: 不等式(i)称为偏差定理; 不等式(ii)称为增长定理和  $\frac{1}{4}$  掩盖定理.

提示: 利用第6题的结论.

证明. **Step1**

固定  $z \in B(0, 1) \setminus \{0\}$ , 令  $\varphi(\zeta) = \frac{z+\zeta}{1+\bar{z}\zeta}$ , 则

$$\varphi'(\zeta) = \frac{1-|z|^2}{(1+\bar{z}\zeta)^2}$$

于是  $\varphi(0) = z$ ,  $\varphi'(0) = 1 - |z|^2$ . 定义

$$g(\zeta) = \frac{f(\varphi(\zeta)) - f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)}.$$

我们有

$$\begin{aligned} g'(\zeta) &= \frac{f'(\varphi(\zeta))\varphi'(\zeta)}{(1-|z|^2)f'(z)} \\ &= \frac{f'(\varphi(\zeta))}{f'(z)(1+\bar{z}\zeta)^2} \\ g''(\zeta) &= \frac{1}{f'(z)} \left( \frac{f'(\varphi(\zeta))}{(1+\bar{z}\zeta)^2} \right)' \\ &= \frac{1}{f'(z)} \frac{f''(\varphi(\zeta))\varphi'(\zeta)(1+\bar{z}\zeta) - 2\bar{z}f'(\varphi(\zeta))}{(1+\bar{z}\zeta)^3} \\ &= \frac{1}{f'(z)} \frac{f''(\varphi(\zeta))(1-|z|^2) - 2\bar{z}(1+\bar{z}\zeta)f'(\varphi(\zeta))}{(1+\bar{z}\zeta)^4} \\ \Rightarrow g''(0) &= (1-|z|^2) \frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z} \end{aligned}$$

容易验证  $g(0) = 0$ ,  $g'(0) = 1$ , 从而  $g \in \mathcal{S}$  类, 则形如

$$g(\zeta) = \zeta + b_2\zeta^2 + \cdots$$

利用第6题结论, 我们有  $|b_2| \leq 2$ . 利用  $|b_2| = \left| \frac{g''(0)}{2} \right| \leq 2$  得

$$\left| (1-|z|^2) \frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z} \right| \leq 4$$

即

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{(1-|z|^2)} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}.$$

### Step2

令  $z = re^{i\theta}$  ( $0 < r < 1$ ), 考虑  $h(r) = \log \left( (1-r^2)f'(re^{i\theta}) \right)$ 。我们不难知道

$$\begin{aligned} h'(r) &= \frac{-2rf'(re^{i\theta}) + e^{i\theta}f''(re^{i\theta})(1-r^2)}{(1-r^2)f'(re^{i\theta})} \\ &= \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}e^{i\theta} - \frac{2r}{1-r^2} \end{aligned}$$

利用Step1的结论, 有

$$\left| e^{i\theta} \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} - \frac{2r}{1-r^2} \right| \leq \frac{4}{1-r^2}.$$

故导函数满足

$$|h'(r)| \leq \frac{4}{1-r^2}.$$

积分得 ( $h(0) = 0$ )

$$\begin{aligned} |h(r)| &= \left| \int_0^r h'(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^r |h'(t)| dt \\ &\leq \int_0^r \frac{4}{1-t^2} dt \\ &= 2 \ln \frac{1+r}{1-r} \end{aligned}$$

得

$$\left( \frac{1-r}{1+r} \right)^2 \leq (1-r^2)|f'(z)| \leq \left( \frac{1+r}{1-r} \right)^2.$$

即

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

### Step3

先证  $f(B(0,1)) \supset \frac{1}{4}B(0,1)$ 。反设存在  $|w_0| < \frac{1}{4}$  但  $w_0 \notin f(B(0,1))$ , 令

$$g(z) = \frac{w_0 f(z)}{w_0 - f(z)}.$$

则  $g$  在  $B(0,1)$  上双全纯,  $g(0) = 0$ 。注意到

$$g(z) = z + \left( a_2 + \frac{1}{w_0} \right) z^2 + \dots$$

再次利用第6题的结论有

$$\left| a_2 + \frac{1}{w_0} \right| \leq 2, \quad |a_2| \leq 2 \implies \left| \frac{1}{w_0} \right| \leq 4 \implies |w_0| \geq \frac{1}{4}.$$

这是一个矛盾! *RHS* 直接利用

$$|f(z)| \leq \int_0^{|z|} |f'(t)| dt \leq \int_0^{|z|} \frac{1+t}{(1-t)^3} dt = \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

由Step2已证结果:

$$|f'(z)| \geq \frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}$$

对  $f(z)$  的取值进行分类讨论

**Case1:**  $|f(z)| \geq \frac{1}{4}$

此时:

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq \frac{1}{4} \leq |f(z)|, \quad \forall a \in (0, 1), \frac{a}{(1+a)^2} \leq \frac{1}{4}$$

**Case2:**  $|f(z)| < \frac{1}{4}$

因为  $f(B(0, 1)) \supset \frac{1}{4}B(0, 1)$ , 则  $L: [0, f(z)] \subset f(B(0, 1))$ 。设  $\Gamma$  是  $f^{-1}(L)$  中从 0 到  $z$  的任意一条曲线, 则:

$$|f(z)| = \int_{\Gamma} |f'(\zeta)| |d\zeta|$$

在  $\Gamma$  上, 注意到

$$f^{-1}([0, f(z)]) \subset B(0, 1)$$

利用Schwarz引理可得  $|\zeta| \leq |z|$ , 故:

$$|f(z)| = \int_{\Gamma} |f'(\zeta)| |d\zeta| \geq \int_0^{|z|} \frac{1-|\zeta|}{(1+|\zeta|)^3} d|\zeta| = \frac{|z|}{(1+|z|)^2}$$

**Step4**

等号成立时, 由第6题  $g(\zeta) = \frac{\zeta}{(1 - e^{i\phi}\zeta)^2}$ , 解得

$$f(w) = \frac{aw}{(1-bw)^2}.$$

由  $f(0) = 0, f'(0) = 1$  解得

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta}z)^2}$$

反之显然成立。 □

注 5.1.6. 更多的知识参看[13]第二章。题中取等号时,  $f$  为 *Koebe函数*  $K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$  的一个旋转。

在估计双全纯映射的增长时, 径向积分路径是最优选择, 因为是欧氏距离下最短路径, 其他路径长度更大, 会导致更松的估计。

读者可继续参考[1]P<sub>227</sub>, 14.14。有意思的一点为, 在 **Step1** 中如果我们取

$$g(\zeta) = \frac{f(\varphi(\zeta)) - f(z)}{f'(z)}$$

则以上所有推理都过的去, 最后我们得到

$$|h'(r)| \leq \frac{4}{(1-r^2)^2}.$$

注意到

$$\int_0^r \frac{4}{(1-t^2)^2} dt = \ln \frac{1+r}{1-r} + \frac{2r}{1-r^2}$$

于是有

$$\frac{e^{-\frac{2r}{1-r^2}}}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{e^{\frac{2r}{1-r^2}}}{(1-r)^2}$$

注意到

$$e^{-\frac{2r}{1-r^2}} \leq \frac{1-r}{1+r}, \quad \frac{1+r}{1-r} \leq e^{\frac{2r}{1-r^2}}$$

可见这种设法并不能改进上下界, 从而没什么用(太噓)。

8. 证明: 若  $w = \varphi(z)$  双全纯地将  $D = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$  映为  $G = \{w \in \mathbb{C} : R_1 < |w| < R_2\}$ , 其中,  $0 < r_1 < r_2 < \infty, 0 < R_1 < R_2 < \infty$ , 则  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{R_1}{R_2}$ , 并且  $\varphi(z) = e^{i\theta} \frac{R_1 z}{r_1}$  或  $\varphi(z) = e^{i\theta} \frac{R_2 r_1}{z}, \theta \in \mathbb{R}$ .

提示: 利用第4题的结论

证明. 这是Schwarz对称原理的推论, 我没有想到用提示的做法, 本书P<sub>252</sub>的例6.1.6给出了一种证明方法。□

注 5.1.7. 此外更加系统的讨论这四题可以去看[15]第四章第三节:多连通区域的映射定理。

## 5.2 孤立奇点

1. 是否存在  $\overline{B(0,1)} \setminus \{0\}$  上的无界全纯函数  $f$ , 使得  $\lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = 0$ ?

证明. 我们补充定义, 即

$$g(z) = \begin{cases} zf(z), & z \in \overline{B(0,1)} \setminus \{0\} \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

此时  $g(z)$  全纯. 而

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{g(z)}{z} = g'(0) < \infty$$

于是  $0$  为  $f(z)$  的可去奇点, 即  $f(z)$  有界, 这是一个矛盾.  $\square$

注 5.2.1. 参看 [9]P<sub>49</sub>. 我们给出以下定理.

**定理 5.2.1 (Riemann定理).** 若  $F$  在  $B(0,r) \setminus \{0\}$  内全纯有界, 则  $F$  可以解析延拓到  $B(0,r)$  上, 即

$$\exists f \in H(B(0,r)), \text{ s.t. } f|_{B(0,r) \setminus \{0\}} = F$$

证明. 定义

$$G(z) = \begin{cases} z^2 F(z), & z \in B(0,r) \setminus \{0\} \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

注意到

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{G(z) - 0}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} zF(z) = 0$$

于是  $G(z)$  在  $B(0,r)$  上连续可导, 且满足 Cauchy-Riemann 方程. 而  $z \neq 0$  时

$$G'(z) = z^2 F'(z) + 2zF(z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow 0$$

于是其实部虚部有连续偏导数, 则  $G(z) \in H(B(0,r))$ . 于是

$$G(z) = a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

显然级数收敛, 定义

$$f(z) = \frac{G(z)}{z^2}$$

显然此时其收敛半径不变. 于是  $f(z) \in H(B(0,r))$ , 且满足

$$f(z) = F(z), \quad \forall z \in B(0,r) \setminus \{0\}$$

$\square$

2. 下列初等全纯函数有哪些奇点? 指出其类别:

$$\begin{aligned} & \text{(i)} \frac{1}{\sin z - \cos z} \quad \text{(ii)} \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{e^z - 1} \quad \text{(iii)} \sin \frac{1}{1-z} \quad \text{(iv)} \tan z \\ & \text{(v)} \frac{e^z}{z(1-e^z)} \quad \text{(vi)} e^{\cot \frac{1}{z}} \quad \text{(vii)} \sin \left( \frac{1}{\cos \frac{1}{z}} \right) \quad \text{(viii)} e^{\tan z}. \end{aligned}$$

证明. (i): 显然  $z = \frac{\pi}{4} + k\pi$  为奇点, 且为极点, 注意到奇点列趋于  $\infty$ , 于是  $\infty$  处不为孤立奇点。

(ii): 显然  $z = 1, 2k\pi i$  为奇点,  $z = 2k\pi i$  时为极点,  $z = 1$  时易知  $e^{\frac{1}{1-z}}$  沿  $x$  轴左右趋于 0 时极限不同, 即极限不存在, 为本性奇点, 类似(i)可知  $\infty$  处不为孤立奇点。

(iii):  $z = 1$  为奇点, 显然取  $z = n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}$  时, 极限不存在, 且为本性奇点, 显然  $\infty$  处为可去奇点。

(iv):  $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , 且沿着  $x$  轴左右趋于时, 极限均为无穷。即为极点, 类似(i)可知  $\infty$  处不为孤立奇点。

(v):  $z = 2k\pi i$  为奇点, 且为极点, 因为

$$\lim_{z \rightarrow 2k\pi} \frac{e^z}{z(1-e^z)} = \frac{1}{2k\pi} \lim_{z \rightarrow 2k\pi} \frac{1}{1-e^z} = \infty$$

类似(i)可知  $\infty$  处不为孤立奇点。

(vi): 奇点等价于  $\tan \frac{1}{z} = 0$  或  $z = 0$ , 即

$$z = 0, \frac{1}{k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

显然  $\infty$  处为本性奇点。类似(ii)讨论可知两种情况下极限均不存在(取子列), 即为本性奇点。而在  $z = 0$  处, 奇点列趋于 0, 于是  $z = 0$  不为孤立奇点。

(vii): 显然为  $z = 0$  或

$$\cos \frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2}{\pi(1+2k)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

类似(iii)不难验证此时奇点列和  $\infty$  为本性奇点, 类似(vi)可知  $z = 0$  为非孤立奇点。

(viii): 奇点为

$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

类似(ii)讨论可得奇点列为本性奇点,  $\infty$  处为非孤立奇点。  $\square$

3. 证明: 若  $z_0$  是全纯函数  $f: B(z_0, r) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  的本性奇点, 则  $z_0$  也是  $\frac{1}{f(z)}$  的本性奇点。

证明. 反证, 如果此时  $z_0$  为  $\frac{1}{f(z)}$  的极点或者可去奇点时, 等价于

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = \infty, a. \quad a < \infty$$

此时不难得到

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0, \frac{1}{a}.$$

这与 $z_0$ 为 $f(z)$ 的本性奇点相矛盾!

其中题目条件保证了 $z_0$ 为 $\frac{1}{f(z)}$ 的孤立奇点。  $\square$

4. 设 $R(z)$ 是有理函数,  $z_1, z_2, \dots, z_n$ 是 $R(z)$ 在 $\mathbb{C}_\infty$ 上的全部不同的极点. 证明: 若 $z_0$ 是全纯函数 $f: B(z_0, r) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}_\infty \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ 的本性奇点, 则 $z_0$ 也是 $R(f(z))$ 的本性奇点.

证明. 由条件, 不妨设

$$R(z) = \frac{P(z)}{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)}$$

于是

$$R(f(z)) = \frac{P(f(z))}{(f(z) - z_1)(f(z) - z_2) \cdots (f(z) - z_n)}$$

如果 $z_0$ 为 $R(f(z))$ 的极点, 则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} R(f(z)) = \infty \Leftrightarrow \exists z_j, \text{ s.t. } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = z_j$$

这与条件矛盾. 如果

$$\lim_{z \rightarrow z_0} R(f(z)) = a < \infty$$

此时必定有

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = b < \infty$$

否则会导致 $\lim_{z \rightarrow z_0} R(f(z))$ 极限不存在, 矛盾!

综上即 $z_0$ 是 $R(f(z))$ 的本性奇点.  $\square$

注 5.2.2. 或者正面证明, 利用Picard大定理, 可以取无穷多复值, 对应过来即证。

5. 设 $P_n(z)$ 和 $Q_m(z)$ 分别是 $n$ 次和 $m$ 次多项式, 指出 $\infty$ 是下列有理函数的什么奇点:

$$(i) P_n(z) + Q_m(z) \quad (ii) \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \quad (iii) P_n(z)Q_m(z)$$

证明. 我们考虑 $P_n\left(\frac{1}{z}\right), Q_m\left(\frac{1}{z}\right)$ . 不难看出此时只需要讨论零点并只需要考虑次数最高项。

(i): 易得为极点, 且阶数为 $\max\{n, m\}$ 。

(ii): 当 $n = m$ 时, 无奇点. 当 $n > m$ 时, 为 $n - m$ 阶极点. 当 $n < m$ 时, 为 $m - n$ 阶零点.  $\square$

6. 设 $f$ 是 $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ 上非常数的全纯函数. 证明: 若 $z_0$ 是 $f$ 的零点集的极限点, 则 $z_0$ 是 $f$ 的本性奇点.

证明. 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0, \quad f(z_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

如果  $z_0$  为可去奇点, 可以补充  $f(z_0)$  的定义使得在区域上全纯, 于是  $f(z)$  恒为常数, 矛盾。

如果  $z_0$  为极点, 则此时在  $z_0$  的小邻域内, 必有

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) > M, \quad z \in B(z_0, \delta)$$

于是  $\exists N > 0, n > N$  时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) > M$$

这与  $f(z_n) = 0$  矛盾! □

7. 若  $f$  在域  $D$  上除了极点外, 在其他点处都全纯, 则称  $f$  是  $D$  上的亚纯函数.

证明: 若  $f$  是  $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$  上的亚纯函数, 并且  $z_0$  是  $f$  的极点集的极限点, 则对任意  $A \in \mathbb{C}_\infty$ , 存在收敛于  $z_0$  的点列  $\{z_n\} \subset B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ .

证明. 利用第六题, 考虑

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

则易得  $z_0$  为  $g(z)$  的本性奇点, 于是利用本节定理 5.2.5 可得, 对任意  $a \in \mathbb{C}_\infty$ , 存在趋于  $z_0$  的点列  $\{z_n\}$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = a$ , 取

$$A = \frac{1}{a}$$

即证. □

8. 设  $f$  在  $B(0, R) \setminus \{0\}$  上全纯. 证明: 若  $\operatorname{Re} f(z) > 0, \forall z \in B(0, R) \setminus \{0\}$ , 则 0 是  $f$  的可去奇点.

证明. 考虑函数

$$\phi(z) = \frac{f(z) - 1}{f(z) + 1}.$$

因为  $\operatorname{Re} f(z) > 0$ , 则  $|\phi(z)| \leq 1$ , 进而有界. 由定理 5.2.1, 0 是  $\phi$  的可去奇点. 补充定义

$$\phi(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \phi(z),$$

则  $\phi$  在  $B(0, R)$  上全纯. 断言  $|\phi(0)| < 1$ , 否则由最大模原理,  $\phi(z) \equiv e^{i\theta}$ , 此时

$$\frac{f(z) - 1}{f(z) + 1} = e^{i\theta} \implies f(z) = \frac{e^{i\theta} + 1}{1 - e^{i\theta}} = \frac{2 \cos \frac{\theta}{2}}{-2i \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{i}{\tan \frac{\theta}{2}}$$

取Re, 矛盾!

反解出  $f$ :

$$f(z) = \frac{1 + \phi(z)}{1 - \phi(z)}.$$

显然此时

$$1 - \phi(z) \neq 0, \quad \forall z \in B(0, \delta)$$

补充定义

$$f(0) = \frac{1 + \phi(0)}{1 - \phi(0)},$$

则  $f$  在  $z = 0$  处全纯, 故  $0$  是  $f$  的可去奇点。  $\square$

注 5.2.3. 参看 [4]P<sub>134</sub>。我们给出一个类似的习题, 证明留给读者。

练习 5.2.1. 设  $f(z)$  在  $a$  的去心邻域内全纯, 且不恒为常数, 且  $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$  有界, 证明:  $z = a$  为  $f(z)$  的可去奇点。

提示: 考虑 Schwarz 积分公式, 或者构造

$$F(z) = e^{f(z)}, \quad F(z) = \frac{f(z)}{f(z) - 2 \sup_{B(a, r)} u(z)}$$

9. 设  $f$  是域  $D$  上的亚纯函数.

证明: 对于任意  $A \in \mathbb{C}$ ,  $\frac{f'(z)}{f(z) - A}$  也是  $D$  上的亚纯函数, 并且其极点都是 1 阶的 ( $f$  为常值函数的情形除外)。

证明. 利用本节第七题结论, 显然对任意  $A \in \mathbb{C}_\infty$ , 存在点列  $\{z_n\}$  使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ . 即

$$\frac{f'(z)}{f(z) - A}$$

是  $D$  上的亚纯函数。

在每一个极点的小邻域内有

$$f(z) = \frac{g_k(z)}{(z - z_k)^n} \Rightarrow f'(z) = \frac{g'_k(z)(z - z_k) - n g_k(z)}{(z - z_k)^{n+1}}$$

即

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z) - A} &= \frac{g'_k(z)(z - z_k) - n g_k(z)}{(z - z_k)(g_k(z) - A(z - z_k)^n)} = \frac{h(z)}{z - z_k} \\ h(z) &= \frac{g'_k(z)(z - z_k) - n g_k(z)}{g_k(z) - A(z - z_k)^n} \Rightarrow h(z_k) = \frac{-n g_k(z_k)}{g_k(z_k)} \end{aligned}$$

显然  $h(z)$  全纯, 且其极点都是 1 阶的。  $\square$

10. 证明: 若  $f$  是域  $D$  上的亚纯函数, 但不全纯, 则存在  $R > 0$ , 使得  $B(\infty, R) \subset f(D)$ .

证明.  $f$  存在极点  $z_0 \in D$ . 设其阶数为  $m \geq 1$ , 则有

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \quad g(z_0) \neq 0, g(z) \in H(B(z_0, \delta))$$

取  $r < \delta$  使得

$$\forall z \in \overline{B(z_0, r)} \subset D, g(z) \neq 0$$

此时显然有

$$M := \max_{z \in B(z_0, r)} |g(z)| \in (0, \infty)$$

待定  $R > 0$ ,  $\forall |w| > R$ , 考虑函数:

$$h(z) = w(z - z_0)^m - g(z).$$

在圆周  $|z - z_0| = r$  上, 有:

$$|w(z - z_0)^m| = |w|r^m > Rr^m = M \geq |g(z)| = |w(z - z_0)^m - h(z)|.$$

于是取

$$R = \frac{M}{r^m}$$

由 Rouché 定理,  $h(z)$  与  $w(z - z_0)^m$  在  $|z - z_0| < r$  内零点个数相同. 故

$$\exists z_1 \in B(z_0, r), s.t. h(z_1) = 0 \implies w = \frac{g(z_1)}{(z_1 - z_0)^m} = f(z_1) \in f(D).$$

令  $r$  充分小, 于是  $R$  充分大, 立得  $B(\infty, R) \subset f(D)$ , 证毕.  $\square$

11. 设  $f$  在  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  上全纯, 并且  $0$  和  $\infty$  都是  $f$  的本性奇点. 证明: 若令  $A(r) = \max_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z)$ ,  $0 < r < \infty$ , 则

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log A(r)}{\log r} = \infty,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log A(r)}{\log \frac{1}{r}} = \infty.$$

证明. (i): 设  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ . 利用 4.3 节的第 6 题结论, 我们有

$$a_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\operatorname{Re} f(re^{i\theta})] e^{-in\theta} d\theta, \quad |a_n r^n| \leq 2A(r) - 2\operatorname{Re} f(0)$$

考虑反证，即此时

$$\exists M > 0, \text{ s.t. } \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log A(r)}{\log r} < \infty \Leftrightarrow \exists R > 0, \forall r > R, \frac{\log A(r)}{\log r} < M$$

即

$$\exists R > 0, \forall r > R, A(r) < r^M$$

于是

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{1}{r^n} \left( 2A(r) - 2 \operatorname{Re} f(0) \right) \\ &< 2r^{M-n} - \frac{2 \operatorname{Re} a_0}{r^n} \end{aligned}$$

注意 $M$ 固定，令 $n \rightarrow \infty$ ，于是

$$\exists N > 0, \forall n > N, a_n = 0$$

即 $f(z)$ 的Laurent展开式中仅有有限多正项，这与 $\infty$ 为 $f$ 的本性奇点矛盾!即证。

类似的对于(ii)，利用0为 $f$ 的本性奇点导出矛盾即可。

□



### 5.3 整函数与亚纯函数

1. 求出所有 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数 $f$ , 使得 $|f(z)| = 1, \forall z \in \partial B(0, 1)$ .

证明. 类似4.5节的第15题, 我们设其在 $B(0, 1)$ 内所有极点为 $z_k$ , 考虑

$$g(z) = f(z) \prod_{k=1}^n \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k}z}$$

但是 $g(z)$ 还可能有零点, 利用唯一性定理, 其零点有限, 否则恒为0. 不妨设 $g(z)$ 的所有零点为 $w_j$ , 于是考虑

$$h(z) = g(z) \prod_{k=1}^m \frac{1 - \overline{w_k}z}{z - w_k}$$

显然

$$h(z) \in H(\overline{B(0, 1)}), \quad \forall z \in \overline{B(0, 1)}, h(z) \neq 0, \quad \forall z \in \partial B(0, 1), |h(z)| = 1$$

利用最大模原理可得

$$\forall z \in \overline{B(0, 1)}, |h(z)| \leq 1, \quad \left| \frac{1}{h(z)} \right| \leq 1$$

于是

$$|h(z)| \equiv 1 \Leftrightarrow h(z) = e^{i\theta}$$

于是

$$g(z) = e^{i\theta} \prod_{k=1}^m \frac{z - w_k}{1 - \overline{w_k}z} \Rightarrow f(z) = e^{i\theta} \prod_{k=1}^m \frac{z - w_k}{1 - \overline{w_k}z} \prod_{k=1}^n \frac{1 - \overline{z_k}z}{z - z_k}, n \geq 0, \theta \in \mathbb{R} \quad \square$$

2. 证明: 整函数 $f(z)$ 无零点, 当且仅当存在另一个整函数 $g(z)$ , 使得 $f(z) = e^{g(z)}$ .

证明. 参考[2] $P_{151}$ ,  $\Leftarrow$ : 显然成立。

$\Rightarrow$ : 注意到

$$\frac{f'(z)}{f(z)}$$

为整函数(无奇点)。于是

$$\exists g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \Leftrightarrow \exists g(z) = \text{Log } f(z)$$

即证。 □

3. 设 $P_n(z)$ 是 $n$ 次多项式,  $n \in \mathbb{N}$ . 证明:  $e^z - P_n(z)$ 有无数个零点.

证明. 考虑

$$h(z) := \frac{e^{\frac{1}{z}}}{P_n(\frac{1}{z})}$$

此时 $h(z)$ 至多只有 $n$ 个极点, 于是取 $|z| = R$ 充分大, 此时对应着小邻域 $B(0, \delta)$ 使得 $h(z) \in H(B(0, \delta))$ 。而注意到

$$h\left(\frac{1}{2n\pi i}\right) = 0, \quad h\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow \infty$$

于是0为其本性奇点, 则 $h(z)$ 在 $B(0, \delta)$ 内能无穷次的取到每个有穷复值, 至多只有一个例外, 显然例外值为0。于是

$$\exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ s.t. } h(z_n) = a$$

特别的取 $a = 1$ , 我们完成了证明。 □

4. 设 $SL(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - cb = 1 \right\}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . 证明:

(i)  $SL(2, \mathbb{C})$ 按矩阵乘法构成一个群,  $\{I, -I\}$ 是其正规子群;

(ii)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

是商群

$$\frac{SL(2, \mathbb{C})}{\{I, -I\}}$$

与 $\mathbb{C}_{\infty}$ 的同构群 $\text{Aut}(\mathbb{C}_{\infty})$ 之间的同构.

证明. (i): 先给出群的定义

**定义 5.3.1.**  $G$ 为一个非空集合, 我们称 $G$ 为群. 如果在上面有一个代数运算(即乘法), 且满足:

1. (结合律)  $\forall a, b, c \in G, (ab)c = a(bc)$ .
2. (单位元)  $\forall a \in G, \exists e \in G, \text{ s.t. } ea = ae = a$ .
3. (逆元)  $\forall a \in G, \exists b \in G, \text{ s.t. } ba = ab = e$ .

显然

$$\forall A, B \in SL(2, \mathbb{C}), \det A = 1, \det B = 1 \Rightarrow \det AB = 1$$

于是  $AB \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ , 不难推得(1)成立。

显然  $I$  满足(2)中的条件。

注意到有等式

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是(3)也满足。

接下来给出正规子群的定义

**定义 5.3.2.** 如果群  $G$  的子群  $H$  满足:  $\forall g \in G$ , 有

$$gH = Hg$$

则称  $H$  为  $G$  的**正规子群**。记为  $H \triangleleft G$ 。

设  $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ , 不难验证

$$A\{I, -I\} = \{I, -I\}A$$

于是证毕。

(ii): 由(i)和下面的注, 可知商群

$$\frac{\text{SL}(2, \mathbb{C})}{\{I, -I\}}$$

良定义。设映射为  $\varphi$ , 则

$$\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \Leftrightarrow (a\tilde{c} - \tilde{a}c)z^2 + (a\tilde{d} - \tilde{a}d + b\tilde{c} - \tilde{b}c)z + b\tilde{d} - \tilde{b}d = 0$$

此式对所有  $z$  都成立, 于是

$$\begin{cases} a\tilde{c} - \tilde{a}c = 0 \\ a\tilde{d} - \tilde{a}d + b\tilde{c} - \tilde{b}c = 0 \\ b\tilde{d} - \tilde{b}d = 0 \end{cases}$$

不难解出

$$\frac{a}{\tilde{a}} = \frac{b}{\tilde{b}} = \frac{c}{\tilde{c}} = \frac{d}{\tilde{d}}$$

而此时利用题目条件

$$ad - bc = 1, \quad \tilde{a}\tilde{d} - \tilde{b}\tilde{c} = 1$$

得到

$$a = \tilde{a}, b = \tilde{b}, c = \tilde{c}, d = \tilde{d}$$

于是  $\varphi$  和  $\varphi^{-1}$  均为单射, 即为同构。

□

注 5.3.1. 这个商群又被称为 *Möbius* 变换群。接下来我们给出关于正规子群的等价定义，证明参看 [16]  $P_{53} \sim P_{55}$ 。

定义 5.3.3. 群  $G$  的子群  $H$  为正规子群当且仅当以下三个条件之一成立：

1.  $\forall g \in G, h \in H, ghg^{-1} \in H.$

2.  $G \setminus H$  也为一个群.

3.  $gH = Hg.$

5. 设  $f(z)$  是整函数. 证明: (i) 若  $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}, f(i\mathbb{R}) \subset i\mathbb{R}$ , 则  $f(z)$  是奇函数; (ii) 若  $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}, f(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ , 则  $f(z)$  是偶函数.

证明. 设

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}, a_n \in \mathbb{C}$$

但是

$$f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \Rightarrow a_n \in \mathbb{R}$$

(i): 条件等价于

$$\forall y \in \mathbb{R}, \operatorname{Re} f(iy) = 0$$

注意到

$$\begin{aligned} f(iy) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (iy)^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} (i^{2k}) y^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} i^{2k+1} y^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} (-1)^k y^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} (-1)^k y^{2k+1} \end{aligned}$$

于是

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Re}(f(iy)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} (-1)^k y^{2k} = 0 \Leftrightarrow a_{2k} = 0$$

显然有

$$f(-z) = -f(z)$$

(ii): 条件等价于

$$\forall y \in \mathbb{R}, \operatorname{Im} f(iy) = 0$$

注意到

$$\begin{aligned} f(iy) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n i^n y^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} (-1)^k y^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} (-1)^k y^{2k+1} \end{aligned}$$

则

$$\operatorname{Im}(f(iy)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} (-1)^k y^{2k+1} = 0 \Leftrightarrow a_{2k+1} = 0$$

显然有

$$f(-z) = f(z)$$

我们完成了证明。 □

6. 设  $f$  在  $\mathbb{C}_{\infty}$  上亚纯, 其极点只有  $z = 1, z = 2$  和  $z = \infty$ . 若  $f$  在这3个极点处的Laurent展开式的主要部分分别为  $\frac{1}{z-1}, \frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2}$  和  $z + z^2$ , 并且  $f(0) = 0$ , 求  $f(z)$ .

证明. 设

$$g(z) = f(z) - \frac{1}{z-1} - \left( \frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} \right) - (z + z^2)$$

此时  $f(z)$  的主要部分被消去, 即在  $\mathbb{C}_{\infty}$  全纯, 为整函数。于是恒为常数  $a_0$ 。于是

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} + z + z^2 + a_0$$

代入解得

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-1} + \frac{5}{4} + z + z^2$$

□

## 5.4 残数定理

1. 证明：残数定理与Cauchy积分公式等价.

证明. 留数定理 $\Rightarrow$ Cauchy积分公式：注意到在Cauchy积分公式中 $f(\zeta) \in H(D)$ ，于是

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \text{Res} \left( \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, z \right) = \lim_{\zeta \rightarrow z} (\zeta - z) \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = f(z)$$

同理有

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \text{Res} \left( \frac{n! f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}, z \right) = f^{(n)}(z)$$

即为Cauchy积分公式。

Cauchy积分公式 $\Rightarrow$ 留数定理：注意到Cauchy积分公式可以推出Cauchy积分定理，设 $f(z)$ 在 $D$ 上有孤立奇点 $z_1, \dots, z_n$ ，对每一个孤立奇点可取 $\gamma_k$ 绕着，于是由Cauchy积分定理

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz$$

注意到

$$\text{Res} \left( f(z), z_k \right) = 2\pi i \int_{\gamma_k} f(z) dz$$

代入求和即为

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} \left( f(z), z_k \right)$$

这就是留数定理。 □

2. 若 $a$ 是 $B(a, R) \setminus \{a\}$ 上全纯函数 $f$ 的可去奇点，其中 $a \neq \infty$ ，则显然 $\text{Res}(f, a) = 0$ 。举例说明，若 $\infty$ 是 $B(\infty, R)$ 上全纯函数 $f$ 的可去奇点，则 $\text{Res}(f, \infty)$ 可能不等于零。

证明. 考虑

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

显然 $\infty$ 为可去奇点，但是

$$\text{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{1}{z} dz = -1 \neq 0 \quad \square$$

3. 设  $f \in H(B(\infty, R))$ . 证明: (i) 若  $\infty$  是  $f$  的可去奇点, 则

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f'(z);$$

(ii) 若  $\infty$  是  $f$  的  $m$  阶极点, 则

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} z^{m+2} f^{(m+1)}(z).$$

证明. (i): 显然可设

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n}$$

于是

$$z^2 f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (-n) z^{-n+1}$$

取  $n=1$ , 即得

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f'(z) = -c_{-1} = \operatorname{Res}(f, \infty)$$

(ii): 同理设

$$f(z) = c_m z^m + \cdots + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n}$$

于是

$$z^{m+2} f^{(m+1)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (-1)^{m+1} n(n+1) \cdots (n+m) z^{-n+1}$$

取  $n=1$ , 即得

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{m+2} f^{(m+1)}(z) = c_{-1} (-1)^{m+1} (m+1)!$$

即

$$\frac{(-1)^m}{(m+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} z^{m+2} f^{(m+1)}(z) = -c_{-1} = \operatorname{Res}(f, \infty) \quad \square$$

4. 设  $f, g \in H(B(a, r))$ ,  $f(a) \neq 0$ ,  $a$  是  $g$  的 2 阶零点, 计算  $\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, a\right)$ .

证明. 考虑  $g(z) = (z-a)^2 h(z)$  于是

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, a\right) &= \lim_{z \rightarrow a} \left( (z-a)^2 \frac{f(z)}{g(z)} \right)' \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \left( \frac{f(z)}{h(z)} \right)' \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \left( \frac{f'(z)h(z) - h'(z)f(z)}{h^2(z)} \right) \\ &= \frac{f'(a)h(a) - h'(a)f(a)}{h^2(a)} \end{aligned}$$

下面来计算 $h(a), h'(a)$ 。

注意到

$$\begin{aligned} h(a) &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z)}{(z-a)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{g'(z)}{2(z-a)} \\ &= \frac{g''(a)}{2} \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} h'(a) &= \lim_{z \rightarrow a} h'(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{g'(z)(z-a) - 2g(z)}{(z-a)^3} \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z-a)g''(z) - g'(z)}{3(z-a)^2} \\ &= \frac{g'''(a)}{6} \end{aligned}$$

代入, 结果为

$$\frac{6f'(a)g''(a) - 2g'''(a)f(a)}{3(g''(a))^2}$$

□

5. 设 $f$ 在 $\mathbb{C}$ 上除去孤立奇点外, 在其他点处都全纯. 证明: (i) 若 $f$ 是偶函数, 则 $\text{Res}(f, -a) = -\text{Res}(f, a)$ ;

(ii) 若 $f$ 是奇函数, 则 $\text{Res}(f, -a) = \text{Res}(f, a)$ .

证明. (i): 简单的验证定义5.4.1, 设在 $z = a, z = -a$ 处, 对应Laurent级数系数为 $c_n, \tilde{c}_n$ . 于是

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n(z+a)^n$$

而

$$\text{Res}(f, a) = c_{-1}, \text{Res}(f, -a) = \tilde{c}_{-1}$$

利用 $f$ 是偶函数及Laurent展开的唯一性有

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n = f(-z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(-1)^n(z+a)^n$$

于是

$$c_n(-1)^n = \tilde{c}_n$$

取  $n = -1$ , 即

$$c_{-1} = -\tilde{c}_{-1}$$

(ii): 完全同(i), 最后得到

$$c_n(-1)^{n-1} = \tilde{c}_n \quad \square$$

6. 设  $D$  是由有限条可求长简单闭曲线围成的域,  $g \in H(D) \cap C(\overline{D})$ . 证明: 若 (i)  $f$  在  $D$  上亚纯, 在  $D$  中的全部彼此不同的极点为  $w_1, w_2, \dots, w_m$ , 其相应的阶数分别为  $q_1, q_2, \dots, q_m$ ; (ii)  $f$  在  $\overline{D} \setminus \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  上全纯, 在  $\partial D$  上没有零点; (iii)  $f$  在  $D$  中的全部彼此不同的零点为  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , 其相应的阶数分别为  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , 则

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n p_j g(z_j) - \sum_{j=1}^m q_j g(w_j).$$

并说明这是Cauchy积分公式和辐角原理的推广.

证明. 由Cauchy积分定理我们不妨让  $\gamma_k, \gamma_j$  分别只绕其中一个极点和零点, 于是当绕着零点时有

$$f(z) = (z - z_k)^{p_k} h_k(z)$$

即

$$\frac{g(z)f'(z)}{f(z)} = \frac{p_k g(z)}{z - z_k} + \frac{h'_k(z)g(z)}{h_k(z)}$$

于是

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{g(z)f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{p_k g(z)}{z - z_k} dz = p_k g(z_k)$$

同理的我们设  $f(z) = (z - w_j)^{-q_j} h_j(z)$ , 不难算得

$$\frac{g(z)f'(z)}{f(z)} = -\frac{q_j g(z)}{z - w_j} + \frac{h'_j(z)g(z)}{h_j(z)}$$

于是

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{g(z)f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} -\frac{q_j g(z)}{z - w_j} dz = -q_j g(w_j)$$

分别对  $j, k$  求和即证。

如果取  $g(z) \equiv 1$ , 则为辐角原理。

如果取

$$f(z) = \frac{1}{z - w_j}, z - z_k$$

我们有

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{1}{z-w_j}, \frac{1}{z-z_k}$$

这就是Cauchy积分公式。  $\square$

7. 求下列初等函数在指定点的残数: (i)  $\text{Res}\left(\frac{\sin \alpha z}{z^3 \sin \beta z}, 0\right)$  ( $\alpha \neq \beta, \beta \neq 0$ ); (ii)  $\text{Res}\left(\frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}, i\right)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ); (iii)  $\text{Res}\left(\text{Log} \frac{z-a}{z-b}, \infty\right)$  ( $a \neq b$ ); (iv)  $\text{Res}\left(\frac{1}{z^2} e^{\frac{1}{z}} \text{Log} \frac{1-\alpha z}{1-\beta z}, 0\right)$  ( $\alpha \neq \beta$ ); (v)  $\text{Res}\left(z^3 \cos \frac{1}{z-2}, 2\right)$ ; (vi)  $\text{Res}(\cot^3 z, 0)$ ; (vii)  $\text{Res}\left(\frac{1}{(z-a)^n (z-b)^m}, a\right)$  ( $a \neq b, m, n \in \mathbb{N}$ ); (viii)  $\text{Res}\left(\frac{z^{2n}}{(1+z)^n}, \infty\right)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

证明. (i):利用定义

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha z}{z^3 \sin \beta z} &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (\alpha z)^{2n-1}}{(2n-1)!}}{z^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (\beta z)^{2n-1}}{(2n-1)!}} \\ &= \frac{1}{z^3} \left( \frac{\alpha - \frac{1}{3!} \alpha^3 z^2 + \cdots}{\beta - \frac{1}{3!} \beta^3 z^2 + \cdots} \right) \\ &= \frac{1}{z^3} \left( \frac{\alpha}{\beta} + c_2 z^2 + \cdots \right) \end{aligned}$$

其中最后一步因为为偶函数, 左右移项不难得到

$$-\frac{1}{3!} \beta^2 \alpha + c_2 \beta = -\frac{1}{3!} \alpha^3$$

于是留数为  $c_2$ , 即为

$$\frac{\alpha \beta}{6} - \frac{\alpha^3}{6 \beta}$$

(ii):利用公式可得

$$\text{Res}\left(\frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}, i\right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{(z+i)^{n+1}} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n (2n)!}{n! (2i)^{2n+1}}$$

(iii):直接展开易得

$$\text{Log} \frac{z-a}{z-b} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n - a^n}{n z^n}$$

注意到无穷远处的留数为  $-c_{-1}$ , 于是

$$\text{Res}\left(\text{Log} \frac{z-a}{z-b}, \infty\right) = a-b$$

(iv):直接展开

$$\frac{1}{z^2} e^{\frac{1}{z}} \operatorname{Log} \frac{1-\alpha z}{1-\beta z} = \frac{1}{z^2} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! z^k} \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\beta^n - \alpha^n) z^n}{n} \right)$$

逐项比较 $\frac{1}{z}$ 项可得

$$c_{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n - \alpha^n}{n!}$$

(v):注意到

$$\begin{aligned} z^3 \cos \frac{1}{z-2} &= (z-2+2)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-2)^{2n}} \\ &= \left( (z-2)^3 + 8 + 6(z-2)^2 + 12(z-2) \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-2)^{2n}} \end{aligned}$$

分别取 $n=1, n=2$ 可得

$$\operatorname{Res} \left( z^3 \cos \frac{1}{z-2}, 2 \right) = \frac{(-1)^2}{4!} + 12 \frac{(-1)}{2!} = -\frac{143}{24}$$

(vi):利用公式为

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \left( \left( \frac{z \cos z}{\sin z} \right)^3 \right)''$$

但是二阶导数过于复杂(你可以用Wolfram试一试)于是考虑定义展开。利用

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^7), \quad x \in B(0, \delta)$$

可得

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\tan z} \right)^3 &= \frac{1}{z^3} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + o(z^6)} \right) \\ &= \frac{1}{z^3} \left( 1 - \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{45}z^4 + o(z^6) \right)^3 \\ &= \frac{1}{z^3} \left( 1 - C_3^1 \frac{1}{3}z^2 + \left( \frac{-1}{45} C_3^1 + \left( -\frac{1}{3} \right)^2 C_3^2 \right) z^4 + o(z^6) \right) \\ &= \frac{1}{z^3} \left( 1 - z^2 + \frac{4}{15}z^4 + o(z^6) \right) \end{aligned}$$

其中第二步是通过解级数方程得到, 第三步是利用幂次的组合性质得到。显然有

$$\operatorname{Res} \left( f(z), 0 \right) = c_{-1} = -1$$

(vii):利用公式为

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^m}\right) &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{1}{(z-b)^m}\right)^{(n-1)} \\ &= \frac{(m+n-2)!(-1)^{n-1}}{(m-1)!(n-1)!(a-b)^{m+n-1}}\end{aligned}$$

(viii):利用公式

$$\operatorname{Res}\left(f(z), \infty\right) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

作 $\frac{1}{z}$ 变换可得

$$\frac{1}{z^2} \frac{1}{z^n(z+1)^n} = \frac{1}{z^{n+2}} \sum_{k=0}^{\infty} C_{-n}^k (-z)^k$$

取 $k = n+1$ , 于是

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = (-1)^{n+1}C_{-n}^{n+1}$$

即

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(f(z), \infty\right) &= (-1)^n C_{-n}^{n+1} \\ &= (-1)^n \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-(n+1)+1)}{(n+1)!} \\ &= (-1)^n \frac{(-1)^{n+1}n(n+1)\cdots(2n)}{(n+1)!} \\ &= (-1) \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}\end{aligned}$$

□

注 5.4.1. 如果对于(iii)采用(viii)的做法, 有

$$\operatorname{Res}\left(\operatorname{Log} \frac{z-a}{z-b}, \infty\right) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} \operatorname{Log} \frac{1-az}{1-bz}, 0\right)$$

利用(iv)的展开式不难发现

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} \operatorname{Log} \frac{1-az}{1-bz}, 0\right) = b-a$$

于是也有

$$\operatorname{Res}\left(\operatorname{Log} \frac{z-a}{z-b}, \infty\right) = a-b$$

8. 指出下列初等函数在  $\mathbb{C}_\infty$  中的全部孤立奇点, 并求出这些初等函数在它们各自孤立奇点处的残数:

- (i)  $\frac{1}{z^3 - z^5}$ ; (ii)  $\frac{z^3 + z^2 + 2}{z(z^2 - 1)^2}$ ; (iii)  $\frac{z^2 + z - 1}{z^2(z - 1)}$ ; (iv)  $\frac{z^{n-1}}{z^n + a^n}$  ( $a \neq 0, n \in \mathbb{N}$ );  
 (v)  $\frac{1}{\sin z}$ ; (vi)  $\sin \frac{z}{z+1}$ ; (vii)  $\frac{e^z}{z(z-1)}$ ; (viii)  $\frac{e^{\pi z}}{z^2 + 1}$ .

证明. (i): 显然  $z = 0, z = \pm 1$  为所有奇点.  $z = 0$  时

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \left( \frac{1}{1 - z^2} \right)'' &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2! \cdot 2} \left( \frac{1}{1 + z} + \frac{1}{1 - z} \right)'' \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2! \cdot 2} \left( \frac{2}{(1 + z)^3} + \frac{2}{(1 - z)^3} \right) \\ &= 1\end{aligned}$$

$z = 1$  时

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left( -\frac{1}{(1 + z)z^3} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \left( -\frac{1}{(1 + z)z^3} \right) = -\frac{1}{2}$$

$z = -1$  时

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left( \frac{1}{(1 - z)z^3} \right) = -\frac{1}{2}$$

显然有

$$\operatorname{Res}(f(z), \infty) = 0$$

(ii):  $z = 0, \pm 1$  为奇点.  $z = 0$  时

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^3 + z^2 + 2}{(z^2 - 1)^2} = 2$$

$z = 1$  时

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{z^3 + z^2 + 2}{z(z + 1)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^3 + z^2 - 6z - 2}{z^2(z + 1)^3} = -\frac{3}{4}$$

$z = -1$  时

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left( \frac{z^3 + z^2 + 2}{z(z - 1)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow -1} -\frac{3z^3 + z^2 + 6z - 2}{z^2(z - 1)^3} = -\frac{5}{4}$$

显然

$$\operatorname{Res}(f(z), \infty) = 0$$

(iii):  $z = 0, z = 1$  为奇点.  $z = 0$  时

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{z^2 + z - 1}{z - 1} \right)' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z - 2)z}{(z - 1)^2} = 0$$

$z = 1$ 时

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 + z - 1}{z^2} = 1$$

显然

$$\operatorname{Res}\left(f(z), \infty\right) = -1$$

(iv):解

$$z^n + a^n = 0 \Leftrightarrow z_k = ae^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

于是

$$\frac{z^{n-1}}{z^n + a^n} = \frac{z^{n-1}}{(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{n-1})}$$

即

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(f(z), z_k\right) &= \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{(z - z_k)z^{n-1}}{(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{n-1})} \\ &= \frac{z_k^{n-1}}{\prod_{j \neq k, j=0}^{n-1} (z_k - z_j)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

$\infty$ 远处时

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} \frac{1}{1 + (az)^n} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (-az)^{nk}$$

取 $k = 0$ , 于是在无穷远处留数为

$$-c_{-1} = -1$$

(v):显然 $z_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 为所有一阶奇点。则

$$\operatorname{Res}\left(f(z), z_k\right) = \frac{1}{(\sin z)'} \Big|_{z=z_k} = (-1)^k$$

(vi): $z = -1$ 为奇点。利用Laurent展开得

$$\begin{aligned} \sin \frac{z}{z+1} &= \sin \left(1 - \frac{1}{1+z}\right) \\ &= \sin 1 \cos \left(\frac{1}{1+z}\right) - \cos 1 \sin \left(\frac{1}{1+z}\right) \\ &= \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(1+z)^{2n}} - \cos 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!(1+z)^{2n-1}} \end{aligned}$$

于是取 $n = 1$ 可得

$$\operatorname{Res}\left(f(z), -1\right) = -\cos 1$$

自然的有

$$\operatorname{Res}\left(f(z), \infty\right) = \cos 1$$

(vii):  $z = 0, z = 1$  为其奇点。  $z = 0$  时

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{z - 1} = -1$$

$z = 1$  时

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z}{z} = e$$

于是

$$\operatorname{Res}\left(f(z), \infty\right) = 1 - e$$

(viii): 显然  $z = \pm i$  为其奇点。  $z = i$  时

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{\pi z}}{(z + i)} = \frac{e^{\pi i}}{2i} = \frac{i}{2}$$

$z = -i$  时

$$\lim_{z \rightarrow -i} \frac{e^{\pi z}}{(z - i)} = \frac{e^{-\pi i}}{-2i} = -\frac{i}{2}$$

于是

$$\operatorname{Res}\left(f(z), \infty\right) = 0$$

□

9. 设  $f, g \in H(B(0, R)) \cap C(\overline{B(0, R)})$ ,  $g$  在  $\partial B(0, R)$  上无零点,  $g$  在  $B(0, R)$  中的全部零点  $z_1, z_2, \dots, z_n$  都是 1 阶零点, 求

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{zg(z)} dz.$$

证明. 设  $g(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)h(z)$ ,  $h(z) \neq 0$ 。于是

$$\frac{f(z)}{zg(z)} = \frac{f(z)}{z(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)h(z)}$$

$z = 0$  时

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(0)}{(-1)^n \prod_{k=1}^n z_k h(0)} = \frac{f(0)}{g(0)}$$

$z = z_k$  时

$$\lim_{z \rightarrow z_k} \frac{(z - z_k)f(z)}{zg(z)} = \frac{f(z_k)}{z_k \prod_{j \neq k, j=1}^n (z_k - z_j)h(z_k)}$$

下面来求 $h(z_k)$ 。注意到

$$\begin{aligned}
 h(z_k) &= \lim_{z \rightarrow z_k} h(z) \\
 &= \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{\frac{g(z)}{\prod_{j \neq k, j=1}^n (z - z_j)}}{z - z_k} \\
 &= \left( \frac{g(z)}{\prod_{j \neq k, j=1}^n (z - z_j)} \right)' \Big|_{z=z_k} \\
 &= \frac{g'(z) \prod_{j \neq k, j=1}^n (z - z_j) - \left( \prod_{j \neq k, j=1}^n (z - z_j) \right)' g(z)}{\left( \prod_{j \neq k, j=1}^n (z - z_j) \right)^2} \Big|_{z=z_k} \\
 &= \frac{g'(z_k)}{\prod_{j \neq k, j=1}^n (z_k - z_j)}
 \end{aligned}$$

于是

$$\operatorname{Res} \left( \frac{f(z)}{zg(z)}, z_k \right) = \frac{f(z_k)}{z_k g'(z_k)}$$

则积分值为

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{zg(z)} dz = \sum_{k=1}^n \frac{f(z_k)}{z_k g'(z_k)} + \frac{f(0)}{g(0)}$$

□

注 5.4.2. 在算 $z_k$ 那里做复杂了.....其实利用命题5.4.5可得

$$\operatorname{Res} \left( \frac{f(z)}{zg(z)}, z_k \right) = \frac{f(z_k)}{(zg(z))' \Big|_{z=z_k}} = \frac{f(z_k)}{z_k g'(z_k)}$$

10. 求积分: (i)  $\int_{|z|=2} \frac{1}{z^3(z^{10}-2)} dz$ ; (ii)  $\int_{|z|=1} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n} dz$  ( $|a| < 1 < |b|, n \in \mathbb{N}$ ); (iii)  $\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} [\cos(n\theta - \sin \theta) + i \sin(n\theta - \sin \theta)] d\theta$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ); (iv)  $\int_{|z|=R} \frac{z^2 dz}{e^{2\pi i z^3} - 1}$  ( $n < R^3 < n+1, n \in \mathbb{N}$ ).

证明. (i): 直接计算无穷远处的留数, 注意到 $z = \infty$ 为可去奇点. 利用本节第三题可知

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Res} \left( f(z), \infty \right) &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f'(z) \\
 &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \frac{6 - 13z^{10}}{z^4(z^{10} - 2)^2} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

于是积分值为0。

(ii):  $z = a$  为  $n$  阶极点, 在本节第七题(vii)中取  $m = n$  可得留数为

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{1}{z-b} \right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{(n-1)!^2 (a-b)^{2n-1}}$$

于是积分值为

$$2\pi i \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{(n-1)!^2 (a-b)^{2n-1}}$$

(iii): 注意到原积分可以化简

$$\begin{aligned} LHS &= \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta + i(n\theta - \sin \theta)} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} e^{e^{-i\theta}} e^{in\theta} d\theta \\ &= \int_{|z|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}} z^n}{iz} dz \\ &= 2\pi \operatorname{Res} \left( e^{\frac{1}{z}} z^{n-1}, 0 \right) \end{aligned}$$

注意到

$$e^{\frac{1}{z}} z^{n-1} = z^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

取  $k = n$  我们有

$$c_{-1} = \frac{1}{n!}$$

于是结果为

$$\frac{2\pi}{n!}$$

(iv): 作  $z^3 = w$  代换可得

$$\int_{|z|=R} \frac{z^2 dz}{e^{2\pi i z^3} - 1} = 3 \cdot \frac{1}{3} \int_{|w|=R^3} \frac{dw}{e^{2\pi i w} - 1}$$

其中3倍是因为  $\arg w = 3 \arg z$ , 即当  $z$  绕原点一圈时, 对应  $w$  会绕3圈。

由条件  $n < R^3 < n+1$ , 不难看出此时奇点为  $w = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$ 。利用

$$e^{2\pi i w} - 1 = -2 \sin w\pi (\sin w\pi - i \cos w\pi) = -2 \sin w\pi e^{i(w\pi - \frac{\pi}{2})}$$

于是

$$\int_{|w|=R^3} \frac{dw}{e^{2\pi i w} - 1} = -\frac{1}{2} \int_{|w|=R^3} \frac{dw}{\sin w\pi e^{i(w\pi - \frac{\pi}{2})}}$$

设  $w_k = k, 0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{Z}$ . 由留数定理, 积分值为

$$\begin{aligned}
 -\frac{2\pi i}{2} \sum_{k=-n}^n \operatorname{Res} \left( \frac{1}{\sin w\pi e^{i(w\pi - \frac{\pi}{2})}}, w_k \right) &= -\pi i \sum_{k=-n}^n \operatorname{Res} \left( \frac{1}{\sin w\pi}, w_k \right) \\
 &= -\pi i \sum_{k=-n}^n \frac{1}{(\sin w\pi)' \big|_{w=w_k}} \\
 &= -\pi i \sum_{k=-n}^n \frac{1}{\pi \cos k\pi} \\
 &= -i \sum_{k=-n}^n \frac{e^{\frac{i\pi}{2}}}{(-1)^k e^{ik\pi}} \\
 &= \sum_{k=-n}^n 1 \\
 &= 2n+1
 \end{aligned}$$

□

注 5.4.3. 在 (iii) 中, 你也可以利用 *Cauchy* 积分公式, 这再次反映了二者等价。

$$\begin{aligned}
 \int_{|z|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}} z^n}{iz} dz &= (-1) \left( -\frac{1}{i} \right) \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}} dz \\
 &= \frac{1}{i} \frac{2\pi i}{n!} (e^z)^{(n)} \bigg|_{z=0} \\
 &= \frac{2\pi}{n!}
 \end{aligned}$$

其中第一步利用了倒代换, 系数会多出来一个  $-1$  是因为此时绕着反方向转。

11. 计算积分 (i)  $\int_{|z|=R} \sqrt{(z-a)(z-b)} dz$  ( $a \neq b, R > \max\{|a|, |b|\}, \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{z} = 1$ ); (ii)  $\int_{|z|=R} z^n \log \frac{z-a}{z-b} dz$  ( $a \neq b, R > \max\{|a|, |b|\}$ ).

证明. (i): 考虑  $\infty$  远处的留数, 注意到

$$\sqrt{(z-a)(z-b)} = e^{\frac{1}{2} \operatorname{Log}(z-a)(z-b)}$$

且

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{z} = 1$$

于是  $z = \infty$  为其一阶极点。利用本节第三题的(ii)，于是

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, \infty) &= -\frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow \infty} z^3 f^{(2)}(z) \\ &= -\frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow \infty} z^3 \frac{-(a-b)^2}{4((z-a)(z-b))^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{(a-b)^2}{8}\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\int_{|z|=R} \sqrt{(z-a)(z-b)} dz &= 2\pi i \left( -\operatorname{Res}(f(z), \infty) \right) \\ &= -\pi i \frac{(a-b)^2}{4}\end{aligned}$$

(ii): 利用本节第七题的(iii)可得

$$\begin{aligned}z^n \operatorname{Log} \frac{z-a}{z-b} &= z^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^k - a^k}{k z^k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^k - a^k}{k} z^{n-k}\end{aligned}$$

取  $k = n+1$  可得

$$c_{-1} = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

于是

$$\operatorname{Res}(f(z), \infty) = -c_{-1}$$

而

$$\begin{aligned}\int_{|z|=R} z^n \log \frac{z-a}{z-b} dz &= 2\pi i \left( -\operatorname{Res}(f(z), \infty) \right) \\ &= 2\pi i c_{-1} \\ &= 2\pi i \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

□

注 5.4.4. (i) 中的条件

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{z} = 1$$

中暗含了平方根取在  $\infty$  邻域展开为

$$z + c_0 + \cdots$$

的分支。

12. 设  $D$  是由有限条可求长简单闭曲线围成的域,  $f(z)$  在  $D$  上亚纯, 在  $D$  中的全部互异的极点为  $w_1, w_2, \dots, w_m$ , 对应 Laurent 展开的主要部分为  $f_1(z), f_2(z), \dots, f_m(z)$ , 且在  $\overline{D} \setminus \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  上连续. 证明: 对于任意  $z \in D$ , 有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) - \sum_{j=1}^m f_j(z).$$

证明. 取  $\gamma_k$  只围绕着极点  $w_k$ . 由 Laurent 展开我们有

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - w_k)^n + f_k(z) := h_k(z) + f_k(z)$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{h_k(\zeta) + f_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= h_k(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= f(z) - f_k(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \end{aligned}$$

设

$$f_k(z) = \sum_{j=1}^m \frac{a_{-j}}{(z - w_k)^j}$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_k} \frac{a_{-j}}{(\zeta - w_k)^j(\zeta - z)} d\zeta &= \text{Res} \left( \frac{a_{-j}}{(\zeta - w_k)^j(\zeta - z)}, z \right) + \text{Res} \left( \frac{a_{-j}}{(\zeta - w_k)^j(\zeta - z)}, w_k \right) \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{a_{-j}}{(\zeta - w_k)^j} + \lim_{\zeta \rightarrow w_k} \frac{1}{(j-1)!} \left( \frac{a_{-j}}{\zeta - z} \right)^{(j-1)} \\ &= \frac{a_{-j}}{(z - w_k)^j} + \lim_{\zeta \rightarrow w_k} \frac{a_{-j}(-1)^{j-1}}{(\zeta - z)^j} \\ &= \frac{a_{-j}}{(z - w_k)^j} + \frac{-a_{-j}}{(z - w_k)^j} \\ &= 0 \end{aligned}$$

于是  $\forall k$ , 有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

由Cauchy积分定理,  $\int_{\partial D} = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k}$ , 两边对 $k$ 求和即证明。

注意到 $z$ 只有一个点, 在计算 $f(z)$ 的时候只需计算一次即可。□

**注 5.4.5.** 本题实质上为[15] $P_{155}$ 中定理2.2的推论。由于篇幅原因, 我们在这里不给出具体定理。



## 5.5 利用残数定理计算定积分

1. 利用残数定理和Cauchy积分定理计算下列积分（后面的括号中为正确答案）：

$$(1) \int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1} dx; \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right)$$

证明. 我们不难解得其奇点为

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

利用推论5.5.2, 在 $\mathbb{R}$ 上积分值为

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{k=1}^2 \operatorname{Res}(f(z), z_k) &= 2\pi i \left( \operatorname{Res}(f(z), e^{i\frac{\pi}{4}}) + \operatorname{Res}(f(z), e^{i\frac{3\pi}{4}}) \right) \\ &= 2\pi i \left( \frac{i+1}{e^{i\frac{3\pi}{4}}(1-e^{i\frac{\pi}{2}})(1-e^{i\pi})(1-e^{i\frac{3\pi}{2}})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-i}{e^{i\frac{3\pi}{4}}(i-1)(i+1)(i+i)} \right) \\ &= 2\pi i \left( \frac{1}{e^{i\frac{3\pi}{4}}} \left( -\frac{1}{(i+1)2i} + \frac{1}{(1-i)^2} \right) \right) \\ &= \frac{-2\sqrt{2}\pi i}{(1-i)^2} \\ &= \sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

于是原积分值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ 。 □

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx; \quad \left(\frac{5}{12}\pi\right)$$

证明. 同(1), 奇点为 $z = \pm i, \pm 3i$ . 于是积分值为

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{k=1}^2 \operatorname{Res}(f(z), z_k) &= 2\pi i \left( \operatorname{Res}(f(z), i) + \operatorname{Res}(f(z), 3i) \right) \\ &= 2\pi i \left( \frac{1-i}{16i} + \frac{7+3i}{48i} \right) \\ &= \frac{5}{12}\pi \end{aligned} \quad \square$$

$$(3) \int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+6x^2+13} dx; \quad \left(\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{13}-3}{2}}\right)$$

证明. 注意到

$$x^4 + 6x^2 + 13 = (x^2 + 3)^2 + 4 = (x^2 + 3 + 2i)(x^2 + 3 - 2i)$$

于是函数有4个奇点, 分别为

$$z_1 = \sqrt{2i-3}, z_2 = -\sqrt{2i-3}, z_3 = \sqrt{-2i-3}, z_4 = -\sqrt{-2i-3}$$

注意到函数 $\sqrt{z}$ 把 $z$ 的辐角减半, 且函数 $-z$ 与 $z$ 关于原点中心对称。而 $2i-3$ 在第二象限,  $-2i-3$ 在第三象限。通过简单作图不难看出此时只有 $z_1 = \sqrt{2i-3}, z_4 = -\sqrt{-2i-3}$ 落在了上半平面。注意到 $z_k$ 均为 $f(z)$ 的一阶奇点, 于是我们有

$$\operatorname{Res}(f(z), z) = \frac{z^2}{4z^3 + 12z} = \frac{z}{4z^2 + 12}$$

令上式中 $z = z_1, z_4$ 。不难算得

$$\operatorname{Res}(f(z), z_1) + \operatorname{Res}(f(z), z_4) = \frac{\sqrt{2i-3} + \sqrt{-2i-3}}{8i}$$

下面我们来计算具体数值。考虑令 $z_1 = a_1 + ib_1, -z_4 = z_0 = a_2 + ib_2$ , 我们有

$$z_1^2 = a_1^2 - b_1^2 + 2a_1b_1i = 2i - 3$$

$$z_0^2 = a_2^2 - b_2^2 + 2a_2b_2i = -2i - 3$$

我们有

$$\begin{cases} a_1^2 - b_1^2 = -3 \\ a_1b_1 = 1 \\ a_2^2 - b_2^2 = -3 \\ a_2b_2 = -1 \end{cases}$$

解之, 注意到 $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ , 我们有

$$a_i^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow a_i^2 = \frac{\sqrt{13} - 3}{2}$$

代入可知

$$b_1 + b_2 = 0, \quad a_i = \sqrt{\frac{\sqrt{13} - 3}{2}}, (a_i > 0)$$

于是在 $\mathbb{R}$ 上积分值为

$$\begin{aligned} 2\pi i \left( \frac{\sqrt{2i-3} + \sqrt{-2i-3}}{8i} \right) &= 2\pi \left( \frac{z_1 + z_0}{8} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} (a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2) \\ &= \frac{a_i \pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{13} - 3}{2}} \end{aligned}$$

最后因为 $f(z)$ 为偶函数, 所以积分值为 $\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{13}-3}{2}}$ .  $\square$

$$(4) \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos\theta} d\theta \quad (0 < b < a); \quad \left( \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \right)$$

证明. 设 $z = e^{i\theta}$ 不难得到原积分为

$$\frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{2}{2az + b(z^2 + 1)} dz$$

其奇点为

$$z_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \quad z_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

断言 $z_1 < -1 < z_2 < 0$ . 这是因为

$$z_1 < -1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - b^2} > b - a$$

$$z_2 > -1 \Leftrightarrow a - b < \sqrt{a^2 - b^2} \Leftrightarrow 2b^2 < 2ab$$

$$z_2 < \frac{-a + \sqrt{a^2}}{b} = 0$$

于是只有 $z = z_2$ 在圆内, 为奇点. 于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{2}{2az + b(z^2 + 1)} dz &= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{2}{b(z - z_1)(z - z_2)} dz \\ &= 2\pi i \cdot \frac{2}{ib} \operatorname{Res} \left( \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)}, z_2 \right) \\ &= \frac{4\pi}{b} \frac{1}{z_2 - z_1} \\ &= \frac{4\pi}{b} \cdot \frac{b}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \end{aligned} \quad \square$$

注 5.5.1. 也可以利用Cauchy积分公式. 取

$$g(z) = \frac{1}{z - z_1}$$

显然 $g(z) \in H(B(0, 1))$ . 于是

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \frac{2}{b(z - z_1)(z - z_2)} dz &= \frac{2}{b} \int_{\partial B(0, 1)} \frac{g(z)}{z - z_2} dz \\ &= \frac{2g(z_2)}{b} \\ &= \frac{2}{b(z_2 - z_1)} \end{aligned}$$

之后同上。

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a + \sin^2 \theta} d\theta \quad (a > 0); \quad \left( \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{a(a+1)}} \right)$$

证明. 设  $z = e^{i\theta}$ 。显然

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a + \sin^2 \theta} d\theta &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_{|z|=1} \frac{1}{iz} \cdot \frac{-4z^2}{z^4 - (4a+2)z^2 + 1} dz \\ &= \int_{|z|=1} \frac{iz}{(z^2 - 1)^2 - 4az^2} dz \end{aligned}$$

计算其奇点

$$(z^2 - 1 - 2\sqrt{a}z)(z^2 - 1 + 2\sqrt{a}z) = 0, \quad \Delta = 4a + 4 > 0$$

于是其四个奇点分别为

$$z_{1,2} = \sqrt{a} \pm \sqrt{a+1}, z_{3,4} = -\sqrt{a} \pm \sqrt{a+1}$$

显然

$$z_1 = \sqrt{a} + \sqrt{a+1} > 1, z_4 = -\sqrt{a} - \sqrt{a+1} < -1, z_1 + z_4 = 0, z_2 + z_3 = 0$$

设

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 - 1)^2 - 4az^2}$$

则

$$\begin{aligned} i \int_{|z|=1} \frac{z}{(z^2 - 1)^2 - 4az^2} dz &= -2\pi \left( \operatorname{Res}(f(z), z_2) + \operatorname{Res}(f(z), z_3) \right) \\ &= -2\pi \left( \frac{z_2}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)} + \frac{z_3}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(z_3 - z_4)} \right) \\ &= \frac{-2\pi}{z_2^2 - z_1^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{a(a+1)}} \end{aligned} \quad \square$$

$$(6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx; \quad \left( \frac{\cos 1 - 3 \sin 1}{3e^3} \pi \right)$$

证明. 设  $f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 10}$ . 满足引理5.5.5(Jordan)的条件. 且奇点为  $z = 1 \pm 3i$ . 于是

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx &= \operatorname{Re} \left( 2\pi i \operatorname{Res} (e^{iz} f(z), 1 + 3i) \right) \\ &= \operatorname{Re} \frac{2\pi i e^i 1 + 3i(1 + 3i)}{6i} \\ &= \frac{\cos 1 - 3 \sin 1}{3e^3} \pi \end{aligned} \quad \square$$

$$(7) \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx \quad (a, b > 0); \quad \left( \frac{\pi}{2} e^{-ab} \right)$$

证明. 类似上一题, 设  $f(z) = \frac{z}{z + b^2}$ , 则

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( 2\pi i \operatorname{Res} (e^{ia\theta} f(z), ib) \right) \\ &= \frac{\pi e^{-ab}}{2} \end{aligned} \quad \square$$

注 5.5.2. 这是著名的 **Laplace积分**, 我们还有

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi e^{-ab}}{2a}$$

下面给一种标准的数分做法, 设上述积分为  $I(b)$ , 于是

$$\begin{aligned} I'(b) &= - \int_0^{\infty} \frac{x \sin bx}{a^2 + x^2} dx \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} dx + a^2 \int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x(a^2 + x^2)} dx \\ I''(b) &= a^2 \int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x(a^2 + x^2)} dx \\ &= a^2 I(b) \end{aligned}$$

利用特征根全为单根, 解得

$$\lambda^2 - a^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm a$$

于是通解为

$$I(b) = C_1 e^{ab} + C_2 e^{(-a)b}$$

显然

$$I(0) = \frac{\pi}{2a}, I'(0) = -\frac{\pi}{2}$$

代入即

$$I(b) = \frac{\pi}{2a} e^{-ab}$$

顺便的, 对它求导, 我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x \sin bx}{x^2 + a^2} dx &= -\frac{\partial I(b)}{\partial b} \\ &= \frac{\pi}{2} e^{-ab}\end{aligned}$$

$$(8) \int_0^\infty \frac{\cos x}{(1+x^2)^3} dx; \quad \left( \frac{7}{16} \pi e^{-1} \right)$$

证明. 同上, 奇点为 $\pm i$ 且均为三阶。则

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cos x}{(1+x^2)^3} dx &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^3}, i \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( 2\pi i \cdot \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \left( \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^3} \right)'' \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \pi i \lim_{z \rightarrow i} \left( -\frac{e^{iz}(z^2 + 8iz - 19)}{(z+i)^5} \right) \right) \\ &= \frac{7\pi}{16e}\end{aligned}$$

□

$$(9) \int_0^\infty \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx; \quad \left( \frac{\pi}{2} \right)$$

(提示: 考虑 $\frac{e^{2iz}-1}{z^2}$ 沿图 5.1 所示的曲线上的积分.)

证明. 首先, 利用Dirichlet判别法可知积分收敛。

如图 5.1 (在下面式中我们默认加入了极限过程 $R \rightarrow \infty$ 与 $r \rightarrow 0$ , 本节同)

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\partial D} \frac{e^{2iz}-1}{z^2} dz = \int_r^R \frac{e^{2ix}-1}{x^2} dx + \int_{|z|=R} \frac{e^{2iz}-1}{z^2} dz \\ &\quad + \int_{(|z|=r)^-} \frac{e^{2iz}-1}{z^2} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{2ix}-1}{x^2} dx \\ &= \int_r^R \frac{e^{2ix} + e^{-2ix} - 2}{x^2} dx + (-1)i \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^{2iz}-1}{z^2} \cdot \pi \\ &= \int_r^R \frac{2 \cos 2x - 2}{x^2} dx + 2\pi \\ &= -4 \int_r^R \frac{\sin^2 x}{x^2} dx + 2\pi\end{aligned}$$

其中第二个等号是因为(令 $R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$ ), 利用引理5.5.9

$$\begin{aligned}\int_{|z|=r} \left( \frac{e^{2iz}-1}{z^2} \right) dz &= i \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^{2iz}-1}{z^2} \cdot \pi \\ \left| \int_{|z|=R} \frac{e^{2iz}-1}{z^2} dz \right| &\leq 2\pi R \left| \frac{e^{2iz}-1}{R^2} \right| \leq \frac{4\pi R}{R^2} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty\end{aligned}$$

移项即证。 □

$$(10) \int_0^\infty \left( \frac{\sin x}{x} \right)^3 dx; \quad \left( \frac{3\pi}{8} \right)$$

(提示: 考虑  $\frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3}$  沿图 5.1 所示的曲线上的积分.)

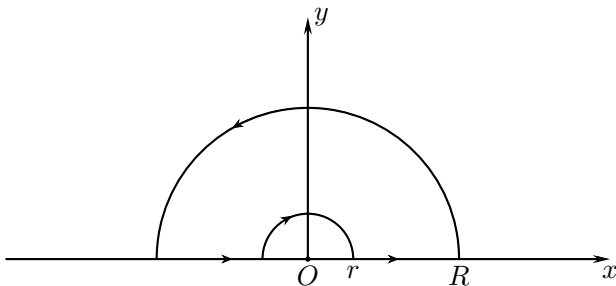


图 5.1

证明. 首先, 类似上一题利用Dirichlet判别法可知积分收敛。

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial D} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz = \int_r^R \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 2}{x^3} dx + \int_{|z|=R} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz \\ &\quad + \int_{(|z|=r)^-} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 2}{x^3} dx \\ &= \int_r^R \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 2}{x^3} dx + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 2}{x^3} dx - iA\pi \\ &= \int_r^R \frac{e^{3ix} - e^{-3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix}}{x^3} dx - iA\pi \\ &= \int_r^R \frac{2i \sin 3x - 3(2i \sin x)}{x^3} dx - iA\pi \\ &= \int_r^R \frac{2i(-\sin^3 x + 3 \sin x \cos^2 x) - 6i \sin x}{x^3} dx - iA\pi \\ &= \int_r^R \frac{-8i \sin^3 x}{x^3} dx + 3i\pi \end{aligned}$$

移项即证。其中

$$\begin{aligned} A &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^2} = -3 \\ \left| \int_{|z|=R} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz \right| &\leq 2\pi R \left| \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{R^3} \right| \leq \frac{12\pi R}{R^3} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty \end{aligned} \quad \square$$

注 5.5.3. 其中3倍角公式可以利用

$$\sin 3x = \operatorname{Im} e^{3ix} = \operatorname{Im}(\cos x + i \sin x)^3 = -\sin^3 x + 3 \sin x \cos^2 x$$

更一般的 $n$ 倍角公式也可以推出。

读者可参看[15]第九章第三节, 我们有

定理 5.5.1 (推广的留数定理). 设 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 上全纯, 但在 $G$ 内有 $m$ 个奇点 $z_j$ , 在 $L = \partial G$ 上有 $n$ 个极点 $t_k$ 。我们有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L f(t) dt = \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}(f(z), z_j) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z), t_k)$$

如果 $L$ 分段光滑,  $t_k$ 为角点, 内角为 $\alpha_k$ , 不难得到

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L f(t) dt = \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}(f(z), z_j) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \alpha_k \operatorname{Res}(f(z), t_k)$$

证明略去, 接下来定义

定义 5.5.1 (Hölder条件). 定义 $\mu$ 阶Hölder条件为

$$\forall t, t_0 \in L, |f(t) - f(t_0)| \leq A|t - t_0|^\mu, \quad \mu \in (0, 1]$$

简记为 $f \in H^\mu$ 。

设

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^n dx$$

利用推广的留数定理, 取围道为上半圆。其中 $f^{(n-1)}(t) \in H^\mu$ , 对于奇点 $t_0$ 我们定义它的高阶奇异积分为

$$\int_L \frac{f(t)}{(t - t_0)^n} dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_L \frac{f^{(n-1)}(t)}{t - t_0} dt, \quad t_0 \in L$$

我们不难计算出

练习 5.5.1.

$$I_{2n} = 2n\pi \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \frac{k^{2n-1}}{(n-k)!(n+k)!}$$

$$I_{2n+1} = (2n+1)\pi \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)^{2n}}{(n-k)!(n+k+1)!}$$

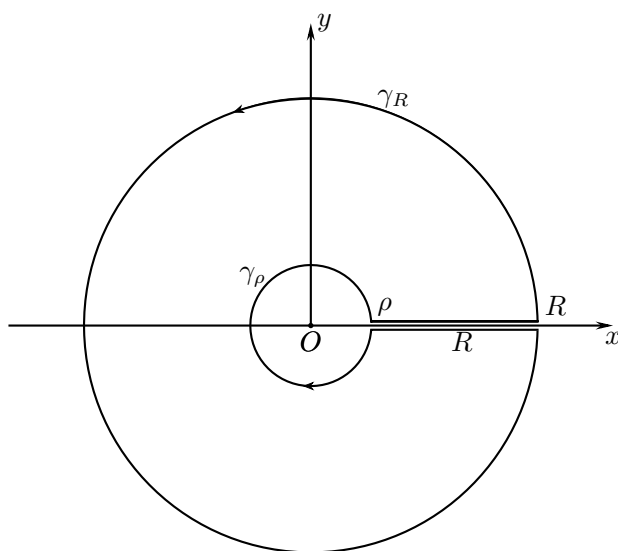


图 5.2

证明留作习题。

$$(11) \int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^2} dx \quad (-1 < p < 1);$$

$$\left( \frac{\pi}{2 \cos \frac{p\pi}{2}} \right)$$

证明. 首先, 0 不为函数奇点, 在无穷远处, 函数约为

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{2-p}} dx$$

显然此时积分收敛。

设函数  $f(z) = \frac{z^p}{1+z^2}$ 。取围线为图 5.2, 记号同, 并设正实轴的上沿为  $l_1$ , 正实轴的下沿为  $l_2$ 。则

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} &= \int_{\gamma_R} + \int_{\gamma_\rho^-} + \int_{l_1} + \int_{l_2} \\ &= 0 + 0 + \int_r^R \frac{x^p}{1+x^2} dx + \int_R^r \frac{x^p e^{2p\pi i}}{1+x^2} dx \\ &= (1 - e^{2p\pi i}) \int_r^R \frac{x^p}{1+x^2} dx \\ &= 2\pi i \left( \operatorname{Res}(f(z), i) + \operatorname{Res}(f(z), -i) \right) \\ &= 2\pi i \left( \frac{i^p}{2i} + \frac{(-i)^p}{-2i} \right) \\ &= \pi \left( e^{\frac{p\pi i}{2}} - e^{\frac{3p\pi i}{2}} \right) \end{aligned}$$

其中第二步中的 $e^{2p\pi i}$ 是因为辐角改变, 详细解释参看书本例5.5.11.且

$$\left| \int_{\gamma_R} \right| \leq 2\pi R \frac{R^p}{R^2 - 1} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty$$

$$\left| \int_{\gamma_\rho^-} \right| \leq 2\pi r \frac{r^p}{1 - r^2} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0$$

令 $r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ 。可得

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^2} dx &= \pi \frac{e^{\frac{p\pi i}{2}} - e^{\frac{3p\pi i}{2}}}{1 - e^{2p\pi i}} \\ &= \pi \frac{e^{\frac{p\pi i}{2}}}{1 + e^{p\pi i}} \\ &= \pi \frac{e^{\frac{p\pi i}{2}}}{2 \cos \frac{p\pi}{2} \left( \cos \frac{p\pi}{2} + i \sin \frac{p\pi}{2} \right)} \\ &= \frac{\pi}{2 \cos \frac{p\pi}{2}} \end{aligned}$$

□

$$(12) \int_0^\infty \frac{x^p}{x^2 + 2x \cos \lambda + 1} dx \quad (-1 < p < 1, -\pi < \lambda < \pi);$$

$$\left( \frac{\pi}{\sin p\pi} \frac{\sin p\lambda}{\sin \lambda} \right)$$

证明. 首先, 0不为函数奇点, 在无穷远处, 函数约为

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{2-p}} dx$$

显然此时积分收敛。

设 $f(z) = \frac{z^p}{z^2 + 2z \cos \lambda + 1}$ 。注意到

$$\Delta = 4 \cos^2 \lambda - 4 < 0$$

于是其奇点为

$$z_{1,2} = \frac{-2 \cos \lambda \pm i \sqrt{-\Delta}}{2} = -\cos \lambda \pm i \sin \lambda$$

同上一题, 取围线为图5.2及记号同上。我们有

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial D} &= \int_{\gamma_R} + \int_{\gamma_\rho^-} + \int_{l_1} + \int_{l_2} \\
 &= 0 + 0 + \int_r^R \frac{x^p}{x^2 + 2x \cos \lambda + 1} dx + \int_R^r \frac{x^p e^{2p\pi i}}{x^2 + 2x \cos \lambda + 1} dx \\
 &= (1 - e^{2p\pi i}) \int_r^R \frac{x^p}{x^2 + 2x \cos \lambda + 1} dx \\
 &= 2\pi i \left( \operatorname{Res}(f(z), z_1) + \operatorname{Res}(f(z), z_2) \right) \\
 &= 2\pi i \left( \frac{e^{ip(\pi-\lambda)}}{2i \sin \lambda} + \frac{e^{ip(\lambda+\pi)}}{-2i \sin \lambda} \right) \\
 &= \pi \frac{e^{ip(\pi-\lambda)} - e^{ip(\lambda+\pi)}}{\sin \lambda}
 \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\gamma_R} \right| &\leq 2\pi R \frac{R^p}{R^2 - 2R \cos \lambda - 1} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty \\
 \left| \int_{\gamma_\rho^-} \right| &\leq 2\pi r \frac{r^p}{1 - r^2 - 2r \cos \lambda} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

令  $r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ 。于是

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{x^p}{x^2 + 2x \cos \lambda + 1} dx &= \pi \frac{e^{ip(\pi-\lambda)} - e^{ip(\lambda+\pi)}}{\sin \lambda (1 - e^{2p\pi i})} \\
 &= \pi \frac{e^{ip\pi}}{\sin \lambda} \cdot \frac{-2i \sin p\lambda}{2 \sin \pi p (\sin \pi p - i \cos \pi p)} \\
 &= \frac{\pi}{\sin \pi p} \frac{\sin p\lambda}{\sin \lambda}
 \end{aligned}$$

□

$$(13) \int_0^\infty \frac{1}{1+x^p} dx \quad (p > 1); \quad \left( \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi}{p}} \right)$$

证明. 首先, 0 不为函数奇点, 在无穷远处, 函数约为

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$$

显然此时积分收敛。

我们做换元  $x^p = y$ 。于是

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^p} dx = \frac{1}{p} \int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{p}}}{y(1+y)} dy$$

下面我们来证明

$$\int_0^{\infty} \frac{y^p}{y(1+y)} dy = \frac{\pi}{\sin \pi p}, \quad \forall p \in (0, 1)$$

取围线为图5.2及记号同上。设  $f(z) = \frac{z^p}{z(1+z)}$ 。有

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} &= \int_{\gamma_R} + \int_{\gamma_\rho^-} + \int_{l_1} + \int_{l_2} \\ &= 0 + 0 + \int_r^R \frac{y^p}{y(1+y)} dy + \int_R^r \frac{y^p e^{2p\pi i}}{y(1+y)} dy \\ &= (1 - e^{2p\pi i}) \int_r^R \frac{y^p}{y(1+y)} dy \\ &= 2\pi i \left( \operatorname{Res}(f(z), 0) + \operatorname{Res}(f(z), -1) \right) \\ &= 2\pi i (-1)^{p-1} = 2\pi i e^{\pi i(p-1)} \end{aligned}$$

且(此时  $p \in (0, 1)$ )

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} \right| &\leq 2\pi R \frac{R^{p-1}}{R-1} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty \\ \left| \int_{\gamma_\rho} \right| &\leq 2\pi r \frac{r^{p-1}}{1-r} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0 \end{aligned}$$

令  $r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ , 于是

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{y^p}{y(1+y)} dy &= \frac{2\pi i e^{\pi i(p-1)}}{1 - e^{2p\pi i}} \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi p} \end{aligned}$$

□

**注 5.5.4.** 伽马函数和贝塔函数定义为

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

不难发现

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p, q > 0$$

取  $q = 1 - p$ , 即

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = B(p, 1-p) = \int_0^1 \frac{y^{p-1}}{1+y} dy = \frac{\pi}{\sin \pi p}$$

这就是著名的余元公式。

$$(14) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px}}{1+e^x} dx \quad (0 < p < 1); \quad \left( \frac{\pi}{\sin p\pi} \right)$$

证明. 首先, 0 不为函数奇点, 在无穷远处, 函数约为

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{e^{(1-p)x}} dx$$

显然此时积分收敛.  $x = -\infty$  时候同理.

我们作  $e^x = y$  换元, 即

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px}}{1+e^x} dx &= \int_0^{\infty} \frac{y^p}{1+y} \cdot \frac{1}{y} dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{1+y} dy \end{aligned}$$

利用上一题的结论, 显然. □

$$(15) \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2} dx \quad (-1 < p < 2); \quad \left( \frac{\pi}{\sin p\pi} \left( 2^{\frac{p}{2}} \cos \frac{p\pi}{4} - 1 \right) \right)$$

(提示: 考虑  $\frac{z^{1-p}(1-z)^p}{1+z^2}$  沿图 5.3 所示的曲线上的积分.)

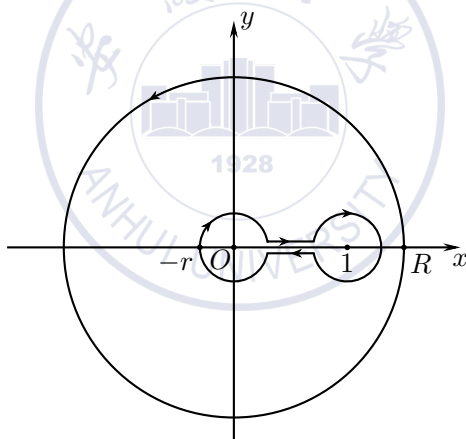


图 5.3

证明. 取围线如图 5.3, 设  $f(z) = \frac{z^{1-p}(1-z)^p}{1+z^2}$ . 类似上几题的定义, 设绕着原点的小圆弧段

为 $\gamma_{0,r}$ , 绕着 $z=1$ 的点的小圆弧为 $\gamma_{1,\rho}$ 。我们有(证明步骤类似书本定理5.5.14)

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial D} &= \int_{\gamma_R} + \int_{\gamma_{0,r}^-} + \int_{\gamma_{1,\rho}^-} + \int_{l_1} + \int_{l_2} \\
 &= \int_{\gamma_R} \frac{z^{1-p}(1-z)^p}{1+z^2} dz + 0 + 0 + \int_r^{1-\rho} \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2} dx + \int_{1-\rho}^r \frac{x^{1-p}(1-x)^p e^{-2\pi i p}}{1+x^2} dx \\
 &= iA2\pi + (1 - e^{-2\pi i p}) \int_r^{1-\rho} \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2} dx \\
 &= 2\pi i \left( \operatorname{Res}(f(z), i) + \operatorname{Res}(f(z), -i) \right) \\
 &= 2\pi i \left( \frac{i^{1-p}(1-i)^p}{2i} + \frac{(-i)^{1-p}(1+i)^p}{-2i} \right) \\
 &= \pi i \left( \frac{(1-i)^p}{i^p} + \frac{(1+i)^p}{(-i)^p} \right) \\
 &= \pi i \left( (-1-i)^p + (i-1)^p \right) \\
 &= \pi i \left( 2^{\frac{p}{2}} e^{-p\pi i} e^{\frac{p\pi i}{4}} + 2^{\frac{p}{2}} e^{-p\pi i} e^{-\frac{p\pi i}{4}} \right) \\
 &= \pi i 2^{\frac{p}{2}} e^{-p\pi i} \cdot 2 \cos \frac{p\pi}{4}
 \end{aligned}$$

此时 $1-p, p \in (-1, 2)$ 。作 $z = re^{i\theta}, 1 + \rho e^{i\theta}$ 可知

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\gamma_{0,\rho}^-} \right| &\leq 2\pi r \frac{r^{1-p}}{1-r^2} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0 \\
 \left| \int_{\gamma_{1,\rho}^-} \right| &\leq 2\pi \rho \frac{(1+\rho e^{i\theta})^{p-1} \rho^p}{1-\rho^2} \leq \frac{4\pi \rho^{p+1}}{1-\rho^2} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

利用书上引理5.5.15, 验证

$$A = \lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{z^{1-p}(1-z)^p}{1+z^2} := 1 \cdot e^{-p\pi i}$$

于是

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{z^{1-p}(1-z)^p}{1+z^2} dz = 2\pi i e^{-p\pi i}$$

令  $r, \rho \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$  可得

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2} dx &= \frac{\pi i 2^{\frac{p}{2}} e^{-p\pi i} \cdot 2 \cos \frac{p\pi}{4} - 2\pi i e^{-p\pi i}}{1 - e^{-2p\pi i}} \\
 &= \pi e^{-p\pi i} \frac{i 2^{\frac{p}{2}} \cdot 2 \cos \frac{p\pi}{4} - 2i}{2 \sin p\pi (\sin p\pi + i \cos p\pi)} \\
 &= \frac{\pi e^{-p\pi i}}{\sin p\pi} \frac{i 2^{\frac{p}{2}} \cdot \cos \frac{p\pi}{4} - i}{i e^{-p\pi i}} \\
 &= \frac{\pi}{\sin p\pi} \left( 2^{\frac{p}{2}} \cos \frac{p\pi}{4} - 1 \right) \quad \square
 \end{aligned}$$

注 5.5.5. 如果取  $(-1)^p = e^{p\pi i}$ , 得不到正确答案。

笔者在这里给出一个习题, 具体证明略去, 留作作业: )。

练习 5.5.2. 证明以下式子

$$\int_0^1 \sin(\pi x) x^x (1-x)^{1-x} dx = \frac{\pi e}{24}$$

给一个提示: 考虑

$$f(z) = e^{i\pi z} z^z (1-z)^{1-z}$$

沿图 5.3 所示的曲线上的积分.

$$(16) \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} \sqrt{\frac{(1-x)^3}{x}} dx; \quad \left( \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \pi \right)$$

证明. 直接带定理 5.5.14 的公式. 设  $f(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$ . 注意所求的留数为在  $f(z)$  的奇点, 而不是  $F(z)$  的奇点. 此时

$$s = \frac{3}{2}, r = -\frac{1}{2}, r + s = 1$$

$$A = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f(z) = 1$$

于是积分值为

$$\begin{aligned}
 -\frac{A\pi}{\sin s\pi} + \frac{\pi}{e^{-s\pi i} \sin s\pi} \operatorname{Res}(F(z), -1) &= -\frac{\pi}{\sin \frac{3\pi}{2}} + \frac{\pi}{e^{-\frac{3\pi i}{2}} \sin \frac{3\pi}{2}} \operatorname{Res}(F(z), -1) \\
 &= \pi - \frac{\pi}{i} \lim_{z \rightarrow -1} \left( \sqrt{\frac{(1-x)^3}{x}} \right)' \\
 &= \pi - \frac{\pi}{i} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}} (-x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}})}{2x} \\
 &= \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \pi \quad \square
 \end{aligned}$$

$$(17) \int_{-1}^1 \frac{\sqrt[4]{(1-x)^3(1+x)}}{1+x^2} dx; \quad \left( (\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2})\pi \right)$$

证明. 设  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ . 类似上一题

$$s = \frac{3}{4}, r = \frac{1}{4}, r + s = 1$$

$$A = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f(z) = 1$$

积分值为

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{\sin \frac{3\pi}{4}} + \frac{\pi}{e^{-\frac{3\pi i}{4}} \sin \frac{3\pi}{4}} \operatorname{Res}(\pm i) &= -\sqrt{2}\pi + \frac{\sqrt{2}\pi}{e^{-\frac{3\pi i}{4}}} \left( \frac{(1-i)^{\frac{3}{4}}(1+i)^{\frac{1}{4}}}{2i} - \frac{(1+i)^{\frac{3}{4}}(1-i)^{\frac{1}{4}}}{2i} \right) \\ &= -\sqrt{2}\pi + \frac{\sqrt{2}\pi e^{\frac{\pi i}{4}}}{2} \left( (1-i)^{\frac{3}{4}}(1+i)^{\frac{1}{4}} - (1+i)^{\frac{3}{4}}(1-i)^{\frac{1}{4}} \right) \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} (1-i)^{\frac{3}{4}} &= e^{\frac{3}{4} \log(1-i)} \\ &= e^{\frac{3}{4} (\log \sqrt{2} + i \arg(1-i))} \\ &= e^{\frac{3}{4} (\log \sqrt{2} + \frac{7}{4}\pi i)} \\ (1+i)^{\frac{1}{4}} &= e^{\frac{1}{4} \log(1+i)} \\ &= e^{\frac{1}{4} (\log \sqrt{2} + i \arg(1+i))} \\ &= e^{\frac{1}{4} (\log \sqrt{2} + \frac{1}{4}\pi i)} \\ (1+i)^{\frac{3}{4}} &= e^{\frac{3}{4} (\log \sqrt{2} + \frac{1}{4}\pi i)} \\ (1-i)^{\frac{1}{4}} &= e^{\frac{1}{4} (\log \sqrt{2} + \frac{7}{4}\pi i)} \end{aligned}$$

代入可得为

$$\begin{aligned} -\sqrt{2}\pi + \frac{\sqrt{2}\pi e^{\frac{\pi i}{4}}}{2} \sqrt{2} \left( e^{i\frac{11\pi}{8}} - e^{i\frac{5\pi}{8}} \right) &= -\sqrt{2}\pi + \pi \left( e^{-\frac{3\pi i}{8}} - e^{i\frac{7\pi}{8}} \right) \\ &= -\sqrt{2}\pi + \pi \left( \left( \cos \frac{3}{8}\pi - \cos \frac{7}{8}\pi \right) - i \left( \sin \frac{3}{8}\pi + \sin \frac{7}{8}\pi \right) \right) \\ &= -\sqrt{2}\pi + \sqrt{2}\pi(1-i) \cos \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

注意到

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

我们可知结果为

$$\left( (1-i) \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{2} \right) \pi$$

□

注 5.5.6. 笔者尝试计算了许多次, 仅利用书上的公式只能计算出这个答案, 有趣的是如果对这个答案取模, 结果正好是正确答案。我不知道这是为什么。下面给一种换元后再用留数定理的方法。

令

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

则

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} dt, \quad \sqrt[4]{(1-x)^3(1+x)} = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{1+t^2}, \quad 1+x^2 = \frac{2(1+t^4)}{(1+t^2)^2}$$

代入积分:

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt[4]{(1-x)^3(1+x)}}{1+x^2} dx = \int_0^\infty 4 \frac{t^{\frac{5}{2}}}{(1+t^4)(1+t^2)} dt = 2 \int_0^\infty \frac{u^{\frac{3}{4}}}{(1+u^2)(1+u)} du$$

设函数为

$$f(z) = \frac{z^{\frac{3}{4}}}{(1+z^2)(1+z)}$$

其中沿正实轴切割分支, 取围道为图 5.2, 我们有(显然广义积分收敛)

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} &= \int_{\gamma_R} + \int_{\gamma_\rho^-} + \int_{l_1} + \int_{l_2} \\ &= 0 + 0 + \int_r^R \frac{x^{\frac{3}{4}}}{(1+x^2)(1+x)} dx + \int_R^r \frac{(e^{2\pi i} x)^{\frac{3}{4}}}{(1+x^2)(1+x)} dx \\ &= (1+i) \int_r^R \frac{x^{\frac{3}{4}}}{(1+x^2)(1+x)} dx \\ &= 2\pi i \left( \operatorname{Res}(f(z), i) + \operatorname{Res}(f(z), -i) + \operatorname{Res}(f(z), 1) \right) \\ &= 2\pi i \left( \frac{(-1)^{\frac{3}{4}}}{2} + \frac{i^{\frac{3}{4}}}{2i(1+i)} + \frac{(-i)^{\frac{3}{4}}}{-2i(1-i)} \right) \\ &= 2\pi i \left( \frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{2} + \frac{e^{\frac{3\pi i}{8}}}{2(-1+i)} + \frac{e^{\frac{\pi i}{8}}}{2(1+i)} \right) \\ &= 2\pi i \left( \frac{1}{4} \left( \sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2} \right) (1-i) \right) \\ &= \frac{\pi}{2} (1+i) \left( \sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2} \right) \end{aligned}$$

且

$$\left| \int_{\gamma_R} \right| \leq 2\pi R \frac{R^{\frac{3}{4}}}{(R-1)(R^2-1)} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty$$

$$\left| \int_{\gamma_\rho} \right| \leq 2\pi \rho \frac{\rho^{\frac{3}{4}}}{(1-\rho)(1-\rho^2)} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0$$

令  $R \rightarrow \infty, \rho \rightarrow 0$ , 积分值为

$$\int_0^\infty \frac{u^{\frac{3}{4}}}{(1+u^2)(1+u)} du = \frac{\pi}{2} \left( \sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2} \right)$$

于是原积分值为  $\pi(\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2})$ 。

$$(18) \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+2x+2} dx; \quad \left( \frac{\pi}{8} \log 2 \right)$$

证明. 设

$$f(z) = \frac{\log^2 z}{z^2 + 2z + 2}$$

构造积分

$$\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{x^2 + 2x + 2} dx$$

取围线为图5.2及记号不变。注意到在0处, 函数约为

$$\int_0^1 \ln^2 x dx < \infty$$

在  $x = \infty$  处,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2 + 2x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x(x+1)} \sim \frac{1}{x^2}$$

于是积分值收敛。

则

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial D} &= \int_{\gamma_R} + \int_{\gamma_\rho^-} + \int_{l_1} + \int_{l_2} \\
 &= 0 + 0 + \int_r^R \frac{\log^2 x}{x^2 + 2x + 2} dx + \int_R^r \frac{(\log x + 2\pi i)^2}{x^2 + 2x + 2} dx \\
 &= -4\pi i \int_r^R \frac{\log x}{x^2 + 2x + 2} dx + 4\pi^2 \int_r^R \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx \\
 &= 2\pi i \left( \operatorname{Res}(f(z), -1+i) + \operatorname{Res}(f(z), -1-i) \right) \\
 &= 2\pi i \left( \frac{(\log \sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4})^2}{2i} - \frac{(\log \sqrt{2} + i\frac{5\pi}{4})^2}{2i} \right) \\
 &= \pi^3 - i \frac{\pi^2 \log 2}{2}
 \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\gamma_R} \right| &\leq 2\pi R \frac{\log^2 R}{R^2 - 2R - 2} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty \\
 \left| \int_{\gamma_\rho^-} \right| &\leq 2\pi r \frac{\log^2 r}{1 - r^2 - 2r} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

令  $r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ 。两边取  $\operatorname{Im}$ ，化简即得。

□

注 5.5.7. 断言

$$I(n) = \int_0^1 \ln^n x \, dx < \infty$$

这是因为

$$\begin{aligned}
 I(n) &= x \ln^n x \Big|_0^1 - \int_0^1 n \ln^{n-1} x \, dx \\
 &= -nI(n-1)
 \end{aligned}$$

之后用数学归纳法即证。同时在无穷远处， $\ln^\alpha x$  可以近似的忽略。

$$(19) \int_0^\infty \frac{\log^2 x}{x^2 + a^2} dx \quad (a > 0); \quad \left( \frac{\pi}{8a} (\pi^2 + 4 \log^2 a) \right)$$

证明. 完全同上题可知积分值收敛。考虑围道如图 5.4，设

$$f(z) = \frac{\log^2 z}{z^2 + a^2}$$

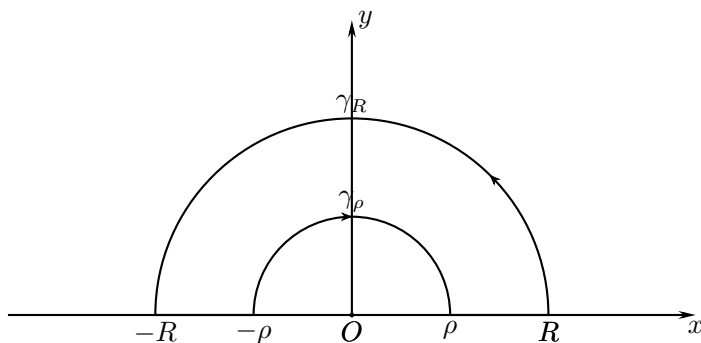


图 5.4

则

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial D} &= \int_{\gamma_R} + \int_{\gamma_\rho^-} + \int_r^R + \int_{-R}^{-r} \\
 &= 0 + 0 + \int_r^R \frac{\log^2 x}{x^2 + a^2} dx + \int_{-R}^{-r} \frac{(\log |x| + \pi i)^2}{x^2 + a^2} dx \\
 &= 2 \int_r^R \frac{\log^2 x}{x^2 + a^2} dx + 2\pi i \int_r^R \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx - \pi^2 \int_r^R \frac{1}{x^2 + a^2} dx \\
 &= 2\pi i \operatorname{Res} \left( f(z), ai \right) \\
 &= \frac{\pi}{a} \log^2(ai) \\
 &= \frac{\pi}{a} \left( \log^2 a - \frac{\pi^2}{4} + i\pi \log a \right)
 \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\gamma_R} \right| &\leq 2\pi R \frac{\log^2 R}{R^2 - a^2} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty \\
 \left| \int_{\gamma_\rho^-} \right| &\leq 2\pi r \frac{\log^2 r}{a^2 - r^2} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

令  $r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ 。两边取  $\operatorname{Re}$ ，并注意到

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + a^2} dx &= \frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} d\frac{x}{a} \\
 &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \Big|_0^\infty \\
 &= \frac{\pi}{2a}
 \end{aligned}$$

即

$$\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi^3}{8a} + \frac{\pi \log^2 a}{2a} \quad \square$$

注 5.5.8. 在负实轴上侧时  $z = e^{\pi i} x$ , 于是  $dz = e^{\pi i} dx$ . 此时第二步除了像书上  $P_{216}$  一样理解, 还可以直接计算

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{-r} \frac{\log^2 z}{z^2 + a^2} dz &= \int_R^r \frac{(\log e^{\pi i} x)^2}{(e^{\pi i} x)^2 + a^2} e^{\pi i} dx \\ &= - \int_R^r \frac{(\log x + i\pi)^2}{x^2 + a^2} dx \\ &= \int_r^R \frac{(\log x + i\pi)^2}{x^2 + a^2} dx \end{aligned}$$

$$(20) \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} \log x}{x^2 + 1} dx; \quad \left( \frac{\sqrt{2}}{4} \pi^2 \right)$$

证明. 在0处, 利用Abel判别法即收敛, 在无穷远处, 积分值约为

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx < \infty$$

构造

$$f(z) = \frac{\sqrt{z} \log^2 z}{z^2 + 1}$$

取围线为图5.2, 记号不变。

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} &= \int_{\gamma_R} + \int_{\gamma_\rho^-} + \int_{l_1} + \int_{l_2} \\ &= 0 + 0 + \int_r^R \frac{\sqrt{x} \log^2 x}{x^2 + 1} dx + \int_R^r \frac{\sqrt{x} e^{\pi i} (\log x + 2\pi i)^2}{x^2 + 1} dx \\ &= 2 \int_r^R \frac{\sqrt{x} \log^2 x}{x^2 + 1} dx + 4\pi i \int_r^R \frac{\sqrt{x} \log x}{x^2 + 1} dx - 4\pi^2 \int_r^R \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx \\ &= 2\pi i \left( \operatorname{Res}(f(z), i) + \operatorname{Res}(f(z), -i) \right) \\ &= 2\pi i \left( \frac{\sqrt{i} \log^2 i}{2i} - \frac{\sqrt{-i} \log^2(-i)}{2i} \right) \\ &= \pi \left( -\frac{\pi^2}{4} e^{\frac{\pi i}{4}} + \frac{9\pi^2}{4} e^{\frac{3\pi i}{4}} \right) \\ &= \pi \left( -\frac{5\sqrt{2}\pi^2}{4} + i\sqrt{2}\pi^2 \right) \end{aligned}$$

且

$$\left| \int_{\gamma_R} \right| \leq 2\pi R \frac{\sqrt{R} \log R}{R^2 - 1} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty$$

$$\left| \int_{\gamma_\rho^-} \right| \leq 2\pi r \frac{\sqrt{r} \log r}{1 - r^2} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0$$

令  $r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ 。两边取Im, 即证。 □

$$(21) \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 - 1} dx;$$

$$\left( \frac{\pi^2}{4} \right)$$

(提示: 考虑  $\frac{\log z}{z^2 - 1}$  沿图 5.5 所示的曲线上的积分.)

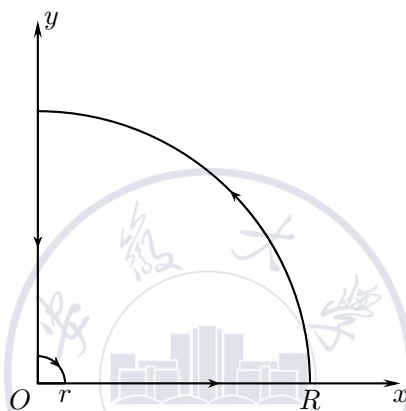


图 5.5

证明. 由以上题目可知积分显然收敛。

利用提示, 我们有(设在  $y$  轴上的直线为  $l_R$ )

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} &= \int_{\gamma_R} + \int_{\gamma_\rho^-} + \int_{l_1} + \int_{l_R} \\ &= 0 + 0 + \int_r^R \frac{\log x}{x^2 - 1} dx + \int_{iR}^{ir} \frac{\log z}{z^2 - 1} dz \\ &= \int_r^R \frac{\log x}{x^2 - 1} dx + \int_R^r i \frac{\log iy}{(iy)^2 - 1} dy \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\int_R^r i \frac{\log iy}{(iy)^2 - 1} dy &= \int_r^R i \frac{\log y + \log i}{y^2 + 1} dy \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_r^R \frac{1}{y^2 + 1} dy + i \int_r^R \frac{\log y}{y^2 + 1} dy \\ &= -\frac{\pi^2}{4} + i \int_r^R \frac{\log y}{y^2 + 1} dy\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 0} z \frac{\log z}{z^2 - 1} &= 0 \\ \left| \int_{\gamma_R} \right| &\leq 2\pi R \frac{\log R}{R^2 - 1} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty\end{aligned}$$

令  $R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$ 。代入，两边取Re即可。 □

$$(22) \int_0^1 \frac{1}{x+1} \log \left( \frac{1-x}{x} \right) dx; \quad \left( \frac{1}{2} \log^2 2 \right)$$

证明. 作换元

$$y = \frac{1-x}{x}$$

于是

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} \log \left( \frac{1-x}{x} \right) dx = \int_0^\infty \frac{\log y}{(1+y)(2+y)} dy$$

构造

$$f(z) = \frac{\log^2 z}{(1+z)(2+z)}$$

此时由上述题目可知积分收敛。取围线为图5.2，记号不变。

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} &= \int_{\gamma_R} + \int_{\gamma_\rho^-} + \int_{l_1} + \int_{l_2} \\ &= 0 + 0 + \int_r^R \frac{\log^2 x}{(1+x)(2+x)} dx + \int_R^r \frac{(\log x + 2\pi i)^2}{(1+x)(2+x)} dx \\ &= -4\pi i \int_r^R \frac{\log x}{(1+x)(2+x)} dx + 4\pi^2 \int_r^R \frac{1}{(1+x)(2+x)} dx \\ &= 2\pi i \left( \operatorname{Res}(f(z), -1) + \operatorname{Res}(f(z), -2) \right) \\ &= 2\pi i \left( \log^2(-1) - \log^2(-2) \right) \\ &= 4\pi^2 \log 2 - i2\pi \log^2 2\end{aligned}$$

且

$$\left| \int_{\gamma_R} \right| \leq 2\pi R \frac{\log^2 R}{(R-1)(R-2)} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty$$

$$\left| \int_{\gamma_\rho^-} \right| \leq 2\pi r \frac{\log^2 r}{(1-r)(2-r)} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0$$

令  $r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ 。两边取Im即可。 □

$$(23) \int_0^\infty \log \left( \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right) dx; \quad \left( \frac{\pi^2}{4} \right)$$

证明. 作换元

$$\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = t$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \log \left( \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right) dx &= 2 \int_1^\infty \frac{\log t}{t^2 - 1} dt \\ &= \int_1^\infty \frac{\log t}{t^2 - 1} dt + \int_1^\infty \frac{\log t}{t^2 - 1} dt \\ &= \int_1^\infty \frac{\log t}{t^2 - 1} dt + \int_1^0 -\frac{1}{t^2} \frac{\log \frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2} - 1} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{\log t}{t^2 - 1} dt \\ &= \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

其中最后一步利用了第21题的结论。 □

$$(24) \int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - 1} dx; \quad \left( \frac{\pi}{2} \left( \frac{e^{2\pi} + 1}{e^{2\pi} - 1} \right) - \frac{1}{2} \right)$$

(提示: 考虑  $\frac{e^{iz}}{e^z - 1}$  沿图 5.6 所示的曲线上的积分.)

证明. 利用Dirichlet判别法可知积分收敛。

设  $z = x + iy \in \partial D$ , 定义

$$l_0 = \{z : y = 0, x \in (0, R)\}, l_R = \{z : x = R, y \in (0, 2\pi)\},$$

$$l_1 = \{z : y = 2\pi, x \in (0, R)\}, l_2 = \{z : x = 0, y \in (0, 2\pi)\}$$

且  $\gamma_0$  以  $2\pi i$  为圆心,  $r$  为半径。  $\gamma_1$  以原点为圆心,  $\rho$  为半径。于是

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} &= \int_{\gamma_0^-} + \int_{\gamma_1^-} + \int_{l_R} + \int_{l_0} + \int_{l_1} + \int_{l_2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

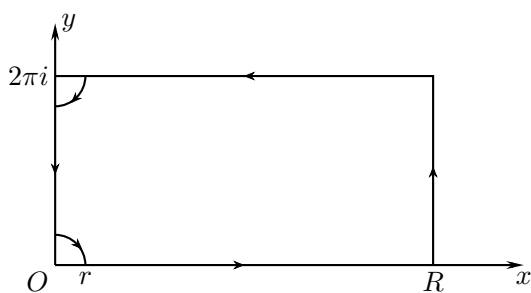


图 5.6

其中

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_0} &= i \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{z \rightarrow 2\pi i} (z - 2\pi i) \frac{e^{iz}}{e^z - 1} \\
 &= i \frac{\pi}{2} \cdot e^{-2\pi} \\
 \int_{\gamma_1} &= i \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^{iz}}{e^z - 1} \\
 &= i \frac{\pi}{2} \cdot 1 \\
 \left| \int_{l_R} \right| &\leq 2\pi R \frac{1}{e^R - 1} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty \\
 \int_{l_1} &= \int_R^r \frac{e^{i(x+2\pi i)}}{e^{x+2\pi i} - 1} dx \\
 &= -e^{-2\pi} \int_r^R \frac{e^{ix}}{e^x - 1} dx \\
 &= -e^{-2\pi} \int_{l_0} \\
 \operatorname{Im} \int_{l_2} &= \int_{2\pi-r}^{\rho} \frac{e^{i(iy)}}{e^{iy} - 1} i dy \\
 &= \operatorname{Im} \int_{2\pi-r}^{\rho} \frac{e^{-y}}{2i \sin \frac{y}{2} e^{\frac{iy}{2}}} i dy \\
 &= -\operatorname{Im} \int_{\rho}^{2\pi-r} \frac{e^{-y}}{2 \sin \frac{y}{2}} \left( \cos \frac{y}{2} - i \sin \frac{y}{2} \right) dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\rho}^{2\pi-r} e^{-y} dy \\
 &= \frac{1 - e^{-2\pi}}{2}
 \end{aligned}$$

令  $r, \rho \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ 。两边取Im, 综上, 最后得到

$$\begin{aligned} \int_{l_0}^{\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} dx &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi}} \left( \frac{\pi}{2} (1 + e^{-2\pi}) - \frac{1 - e^{-2\pi}}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{e^{2\pi} + 1}{e^{2\pi} - 1} \right) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

$$(25) \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + 1} dx; \quad \left( \frac{\pi^2}{12} \right)$$

(提示: 考虑  $\frac{z^2}{e^z + 1}$  沿图 5.7 所示的曲线上的积分.)

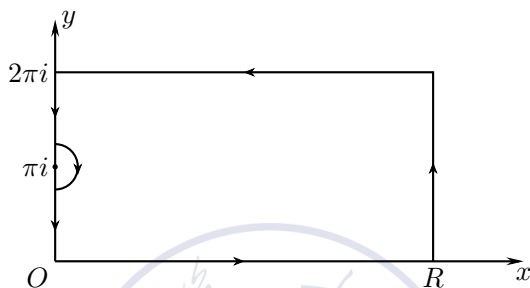


图 5.7

证明. 0 不为奇点, 无穷远处注意到  $e^x$  增长速度较快, 显然积分收敛。

设  $z = x + iy \in \partial D$ ,  $l_0, l_1, l_R$  定义同上, 再定义

$$l_{20} = \{z : x = 0, y \in (\pi + r, 2\pi)\}$$

$$l_{21} = \{z : x = 0, y \in (0, \pi - r)\}$$

$\gamma_0$  表示以  $\pi$  为圆心的半圆。则

$$0 = \int_{\partial D} = \int_{\gamma_0^-} + \int_{l_R} + \int_{l_0} + \int_{l_1} + \int_{l_{20}} + \int_{l_{21}}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_0} &= i\pi \lim_{z \rightarrow \pi i} (z - \pi i) \frac{z^2}{e^z + 1} = i\pi^3 \\
 \left| \int_{l_R} \right| &\leq 2\pi R \frac{R^2}{e^R + 1} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty \\
 \int_{l_0} + \int_{l_1} &= \int_0^R \frac{x^2}{e^x + 1} dx + \int_R^0 \frac{(x + 2\pi i)^2}{e^{x+2\pi i} + 1} dx \\
 &= \int_R^0 \frac{4\pi i x - 4\pi^2}{e^x + 1} dx \\
 \operatorname{Im} \int_{l_{20}} &= \operatorname{Im} \int_{2\pi}^{\pi+r} \frac{(iy)^2}{e^{iy} + 1} i dy \\
 &= \operatorname{Im} \int_{2\pi}^{\pi+r} \frac{-y^2}{2 \cos \frac{y}{2} e^{\frac{iy}{2}}} i dy \\
 &= \operatorname{Im} i \int_{2\pi}^{\pi+r} \frac{-y^2}{2 \cos \frac{y}{2}} \left( \cos \frac{y}{2} - i \sin \frac{y}{2} \right) dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\pi+r}^{2\pi} y^2 dy \\
 \operatorname{Im} \int_{l_{21}} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi-r} y^2 dy
 \end{aligned}$$

两边取Im, 并令  $r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ , 我们得到

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{x}{e^x + 1} dx &= -\frac{1}{4\pi} \left( \pi^3 - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} y^2 dy \right) \\
 &= \frac{\pi^2}{12}
 \end{aligned}$$

□

$$(26) \int_0^\infty x^n e^{-x^{\frac{1}{4}}} \sin x^{\frac{1}{4}} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad (0)$$

(提示: 考虑  $z^{4n+3} e^{-z+iz}$  沿图 5.8 所示的曲线上的积分.)

证明. 要证明积分值为0, 作  $x^{\frac{1}{4}} = t$  换元可得

$$\int_0^\infty x^n e^{-x^{\frac{1}{4}}} \sin x^{\frac{1}{4}} dx = 4 \int_0^\infty t^{4n+3} e^{-t} \sin t dt = 0$$

如图 5.8, 定义

$$l_0 = \{z : z \in \partial D, y = 0, x \in (0, R)\}, l_1 = \{z : z \in \partial D, x = 0, y \in (0, R)\}$$

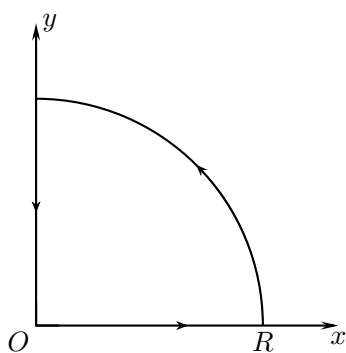


图 5.8

则

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\partial D} = \int_{\gamma_R} + \int_{l_0} + \int_{l_1} \\
 &= 0 + \int_0^R x^{4n+3} e^{-x+ix} dx + \int_R^0 (iy)^{4n+3} e^{-iy+i(iy)} i dy \\
 &= \int_0^R x^{4n+3} e^{-x+ix} dx + \int_R^0 y^{4n+3} e^{-iy-y} dy \\
 &= \int_0^R x^{4n+3} e^{-x} (\cos x + i \sin x) dx - \int_0^R y^{4n+3} e^{-y} (\cos y - i \sin y) dy \\
 &= 2i \int_0^R x^{4n+3} e^{-x} \sin x dx
 \end{aligned}$$

且

$$\left| \int_{\gamma_R} \right| \leq 2\pi R \frac{R^{4n+3}}{e^R} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty$$

令  $R \rightarrow \infty$ 。于是必定有

$$\int_0^\infty x^{4n+3} e^{-x} \sin x dx = 0$$

□

$$(27) \int_{-\infty}^\infty e^{-(x+ia)^2} dx; \quad (a \in \mathbb{R}) \quad (\sqrt{\pi})$$

证明. 类似Poisson积分的证明, 取围道为图5.9。设

$$f(z) = e^{-z^2}$$

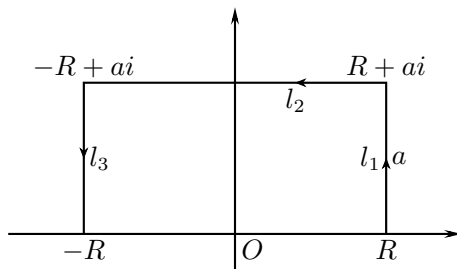


图 5.9

于是

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\partial D} = \int_{l_R} + \int_{l_1} + \int_{l_2} + \int_{l_3} \\
 &= \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + 0 + \int_R^{-R} e^{-(x+ia)^2} dx + 0 \\
 &= \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + \int_R^{-R} e^{-(x+ia)^2} dx
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{l_1} \right| &\leq 2\pi R \frac{1}{e^{R^2-a^2}} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty \\
 \left| \int_{l_3} \right| &\leq 2\pi R \frac{1}{e^{R^2-a^2}} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

令  $R \rightarrow \infty$ , 我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ia)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

□

$$(28) \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx^2 dx \quad (a > 0);$$

$$\left( \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{a^2+b^2}} \right)$$

(提示: 考虑  $e^{z^2(-a+ib)}$  沿图 5.10 所示的曲线上的积分, 其中  $\varphi$  待定.)

证明. 利用 Dirichlet 判别法可知积分收敛。

由于  $\cos z$  为偶函数, 我们不妨设  $b > 0$ 。固定待定  $\varphi$ , 设

$$l_0 = \{z : z \in \partial D, y = 0, x \in (0, R)\}, l_1 = \{z : z \in \partial D, z = re^{i\varphi}, r \in (0, R)\}$$

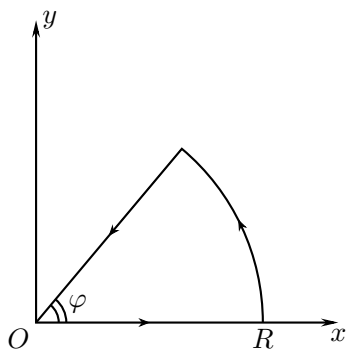


图 5.10

我们有

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\partial D} = \int_{\gamma_R} + \int_{l_0} + \int_{l_1} \\
 &= 0 + \int_0^R e^{x^2(-a+ib)} dx + \int_R^0 e^{r^2 e^{i2\varphi}(-a+ib)} e^{i\varphi} dr \\
 &= \int_0^R e^{x^2(-a+ib)} dx + \int_R^0 e^{r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)(-a+ib)} e^{i\varphi} dr \\
 &= \int_0^R e^{-ax^2} e^{ibx^2} dx + \int_R^0 e^{r^2(A+iB)+i\varphi} dr \\
 &= \int_0^R e^{-ax^2} e^{ibx^2} dx - \int_0^R e^{Ar^2} (\cos(Br^2 + \varphi) + i \sin(Br^2 + \varphi)) dr
 \end{aligned}$$

且(此时  $x, y > 0$ )

$$\left| \int_{\gamma_R} \right| \leq 2\pi R \frac{e^{-2bxy}}{e^{aR^2}} \leq 2\pi R \frac{1}{e^{aR^2}} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty$$

令  $R \rightarrow \infty$ 。其中

$$A = -a \cos 2\varphi - b \sin 2\varphi, \quad B = -a \sin 2\varphi + b \cos 2\varphi$$

考虑取Re, 并为了方便计算第二个积分我们令  $B = 0$ , 这就确定了待定的  $\varphi$ 。即此时

$$\tan 2\varphi = \frac{b}{a}$$

不难计算出

$$\cos 2\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin 2\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \varphi = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)}$$

显然  $A < 0$ , 利用概率积分我们有

$$\begin{aligned}\cos \varphi \int_0^{\infty} e^{Ar^2} dr &= \cos \varphi \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{-A}} \\ &= \cos \varphi \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a \cos 2\varphi + b \sin 2\varphi}} \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{a^2 + b^2}}\end{aligned}$$

□

注 5.5.9. 当积分形如

$$g(z)e^{a \cos bz} \cos(a \sin bz)$$

对称的考虑

$$g(z)e^{a \cos bz} \sin(a \sin bz)$$

组合为

$$g(z)e^{a \cos bz} e^{i(a \sin bz)} = g(z)e^{a \cos bz + i(a \sin bz)} = g(z)e^{ae^{ibz}}$$

这就是要构造的函数。

$$(29) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \theta d\theta; \quad \left(-\frac{\pi}{2} \log 2\right)$$

(提示: 先求出广义积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log |e^{i\theta} - 1| d\theta$ .)

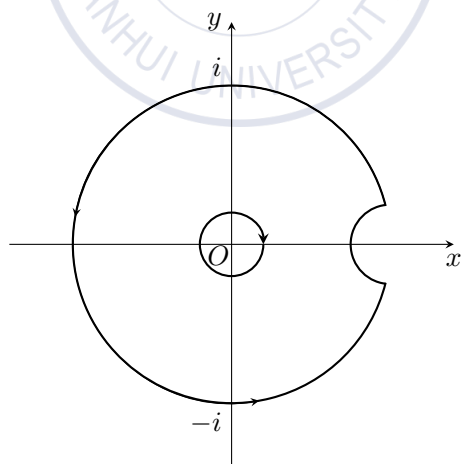


图 5.11

证明. 我们考虑图 5.11, 设  $\gamma_r$  以原点为圆心,  $r$  为半径,  $\gamma_\varepsilon$  以  $z = 1$  为圆心,  $\varepsilon$  为半径的一段小圆弧, 与原点最大张角记为  $\theta_\varepsilon$ . 构造

$$f(z) = \frac{\log(1-z)}{z}$$

则

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} &= \int_{\gamma} + \int_{\gamma_r^-} + \int_{\gamma_\varepsilon^-} \\ &= \int_{\theta_\varepsilon}^{2\pi-\theta_\varepsilon} \frac{\log(1-e^{i\theta})}{e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_{\theta_\varepsilon}^{2\pi-\theta_\varepsilon} \log(1-e^{i\theta}) d\theta \\ &= i \int_{\theta_\varepsilon}^{2\pi-\theta_\varepsilon} \log|1-e^{i\theta}| + i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) d\theta \\ &= i \int_{\theta_\varepsilon}^{2\pi-\theta_\varepsilon} \log|1-e^{i\theta}| d\theta \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_r} \right| &\leq 2\pi r \frac{\log(1-re^{i\theta})}{r} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0 \\ \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{\log(1-z)}{z} &= 0 \Leftrightarrow \int_{\gamma_\varepsilon} \rightarrow 0, \quad \theta_\varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

其中  $(\arg \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$

$$\begin{aligned} \arg(1-e^{i\theta}) &= \arg(-2i \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{i\theta}{2}}) \\ &= \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

令  $r \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0 (\theta_\varepsilon \rightarrow 0)$ , 则

$$\int_0^{2\pi} \log|1-e^{i\theta}| d\theta = 0$$

注意到

$$|1-e^{i\theta}| = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

即

$$\int_0^{2\pi} \log \sin \frac{\theta}{2} d\theta = -2\pi \log 2$$

所以

$$\begin{aligned}
 -\pi \log 2 &= \int_0^\pi \log \sin \theta d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \log \sin \theta d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \log \sin(\pi - \theta) d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \theta d\theta
 \end{aligned}$$

移项即可。 □

注 5.5.10. 另解可参考[2]P<sub>125</sub>中5)。

$$(30) \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 - 2a \cos x + a^2} dx \quad (a > 0);$$

$$\left( \begin{cases} \frac{\pi}{a} \log(1+a), & 0 < a \leq 1; \\ \frac{\pi}{a} \log\left(1 + \frac{1}{a}\right), & a > 1 \end{cases} \right)$$

(提示: 考虑  $\frac{z}{a - e^{-iz}}$  沿图 5.12 所示的曲线上的积分.)

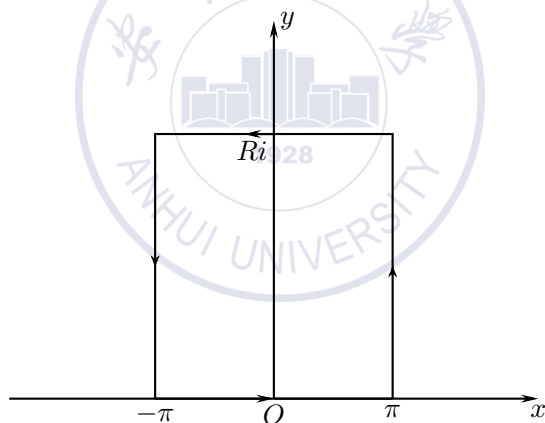


图 5.12

证明. 注意到函数有奇点  $z = i \log a$ , 观察图 5.12 不难看出当  $a > 1$  时, 奇点在积分区域内部, 当  $a \in (0, 1]$  时, 奇点在外部。设  $(z = x + iy \in \partial D)$

$$\begin{aligned}
 l_0 &= \{z : y = 0, x \in (-\pi, \pi)\}, l_R = \{z : y = iR, x \in (-\pi, \pi)\}, \\
 l_1 &= \{z : x = \pi, y \in (0, R)\}, l_2 = \{z : x = -\pi, y \in (0, R)\}.
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial D} &= \int_{l_R} + \int_{l_0} + \int_{l_1} + \int_{l_2} \\
 &= 0 + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{a - e^{-ix}} dx + \int_0^R \frac{\pi + iy}{a - e^{-i(\pi + iy)}} i dy + \int_R^0 \frac{-\pi + iy}{a - e^{-i(-\pi + iy)}} i dy \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{a - e^{-ix}} dx + \int_0^R \frac{\pi + iy}{a + e^y} i dy + \int_R^0 \frac{-\pi + iy}{a + e^y} i dy \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{a - e^{-ix}} dx + 2\pi i \int_0^R \frac{1}{a + e^y} dy
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \frac{1}{a + e^y} dy &= \int_1^{\infty} \frac{1}{t(a + t)} dt \\
 &= \frac{1}{a} \log \frac{t}{a + t} \Big|_{t=1}^{\infty} \\
 &= \frac{1}{a} \log(a + 1)
 \end{aligned}$$

且

$$\left| \int_{l_R} \right| \leq 2\pi R \frac{\pi + 1}{e^R - a} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty$$

令  $R \rightarrow \infty$ 。注意到

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{a - e^{-ix}} &= \frac{xe^{ix}}{ae^{ix} - 1} \\
 &= \frac{xe^{ix}(ae^{-ix} - 1)}{|ae^{ix} - 1|^2} \\
 &= \frac{ax - xe^{ix}}{a^2 - 2a \cos x + 1} \\
 &= \frac{ax - x \cos x - ix \sin x}{a^2 - 2a \cos x + 1}
 \end{aligned}$$

计算留数

$$\begin{aligned}
 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{z}{a - e^{-iz}}, i \log a \right) &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i \log a} \frac{z}{ie^{-iz}} \\
 &= 2\pi i \frac{\log a}{a}
 \end{aligned}$$

考虑取  $\operatorname{Im}$ , 此时为偶函数。于是

$$-2 \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 - 2a \cos x + a^2} dx + \frac{2\pi}{a} \log(a + 1) = \begin{cases} 0, & a \in (0, 1] \\ 2\pi \frac{\log a}{a}, & a > 1 \end{cases}$$

解之, 即为

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 - 2a \cos x + a^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{a} \log(1+a), & a \in (0, 1] \\ \frac{\pi}{a} \log\left(1 + \frac{1}{a}\right), & a > 1 \end{cases} \quad \square$$

$$(31) \int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2} dx; \quad (\pi \log 2)$$

证明. 0不为奇点,  $\infty$ 处时, 积分约为

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx < \infty$$

作  $x = \tan \theta$  换元可知

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \frac{1}{\cos^2 \theta}}{\frac{1}{\cos^2 \theta}} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos^2 \theta d\theta \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin^2 \theta d\theta \\ &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \theta d\theta \\ &= -2 \frac{-\pi}{2} \log 2 \\ &= \pi \log 2 \end{aligned}$$

其中倒数第二步利用了第29题的结论。 □

2. 设  $f(z)$  是有理函数, 在  $[0, \infty)$  上无极点, 并且  $\infty$  是  $f(z)$  的零点. 证明:

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{(\log x)^2 + \pi^2} dx = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left( \frac{f(z)}{\operatorname{Log} z - \pi i}, a_k \right),$$

其中,  $a_1 = -1, a_2, a_3, \dots, a_n$  是  $f(z)$  在  $\mathbb{C}$  中的全部彼此不同的极点,  $\operatorname{Log} z = \log |z| + i \operatorname{Arg} z, 0 < \operatorname{Arg} z < 2\pi, z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ .

证明. 首先利用条件我们可知  $f(0)$  有定义, 且

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$$

由于

$$\operatorname{Log} z = \log |z| + i \operatorname{Arg} z, 0 < \operatorname{Arg} z < 2\pi \Leftrightarrow \operatorname{Log} z = \log z$$

我们考虑函数

$$g(z) = \frac{f(z)}{\log z - \pi i}$$

于是由留数定理，取围道如图5.2，记号不变。有

$$\begin{aligned} 2\pi i RHS &= \int_{\partial D} g(z) dz \\ &= \int_{\gamma_R} + \int_{\gamma_\rho^-} + \int_{l_1} + \int_{l_2} \\ &= 0 + 0 + \int_r^R \frac{f(x)}{\log x - \pi i} dx + \int_R^r \frac{f(x)}{\log x + 2\pi i - \pi i} dx \\ &= 2\pi i \int_r^R \frac{f(x)}{\log^2 x + \pi^2} dx \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} \right| &\leq 2\pi R \frac{\sup_{|z|=R} f(z)}{\log R - \pi} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty \\ \left| \int_{\gamma_\rho} \right| &\leq 2\pi r \frac{f(0)}{\log r - \pi} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

注 5.5.11. 注意到

$$\log z - \pi i = 0 \Leftrightarrow z = -1$$

则如果  $\forall i = 1, 2, \dots, n. a_i \neq -1$ 。则在计算  $RHS$  的值的时候，应当再加上在  $z = -1$  的留数。

## 5.6 一般域上的Mittag-Leffler定理、Weierstrass因子分解定理和插值定理

1. 设 $f$ 和 $g$ 都是域 $D$ 上的亚纯函数, 它们的零点集和极点集相同, 并且相应的零点阶数和极点阶数也相同. 证明: 必存在 $h \in H(D)$ , 使得 $\frac{f(z)}{g(z)} = e^{h(z)}, \forall z \in D$ .

证明. □

2. 设 $\{a_n\}$ 是域 $D$ 中互不相同并且在 $D$ 内部无极限点的点列, Laurent级数

$$\psi_n(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{n,j}}{(z - a_n)^j} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

在 $D$ 上除了 $a_n$ 外的其他点处都全纯. 证明: 存在 $f \in H(D \setminus \{a_n : n \in \mathbb{N}\})$ , 使得 $f$ 在每个 $a_n$ 处的Laurent展开式的主要部分恰为 $\psi_n(z)$ .

证明. □

3. 证明:  $f$ 是域 $D$ 上的亚纯函数, 当且仅当存在 $g, h \in H(D), h \neq 0$ , 使得 $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \forall z \in D$ .

证明. □

4. (插值定理的推广) 设 $\{a_n\}$ 是域 $D$ 中互不相同并且在 $D$ 内部无极限点的点列, Laurent级数

$$\varphi_n(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{n,j}(z - a_n)^j \quad (n = 1, 2, \dots)$$

在 $D$ 上除了 $a_n$ 外的其他点处都全纯. 证明: 对于任意整数列 $\{k_n\}$ , 必存在 $D \setminus \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ 上的全纯函数 $f$ , 使得 $f$ 在每个 $a_n$ 处的Laurent展开式恰为

$$\sum_{j=-\infty}^{k_n} b_{n,j}(z - a_n)^j + \sum_{j=k_n+1}^{\infty} c_{n,j}(z - a_n)^j.$$

证明. □

5. 设 $a_1, a_2$ 是域 $D$ 中的两个不同点. Laurent级数

$$\varphi_n(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{n,j}(z - a_n)^j \quad (n = 1, 2)$$

在 $D$ 上除了 $a_n$ 外的其他点处都全纯. 举例说明, 通常不存在 $D \setminus \{a_1, a_2\}$ 上的全纯函数 $f$ , 使得 $f$ 在 $a_1$ 和 $a_2$ 处的Laurent展开式分别为 $\varphi_1(z)$ 和 $\varphi_2(z)$ .

证明. □

6. 证明: Weierstrass因子分解定理对于一般的域成立.

证明. 我们先设  $z = 0$  不为  $f(z)$  的零点, 以下证明来自[15] $P_{35}$ , 此外[9] $P_{83}$ 中也给出了证明.

**定理 5.6.1 (Weierstrass因子分解定理).** 设整函数  $f(z)$  有无穷多个零点并按次序排列为  $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq |z_3| \leq \cdots$  (高阶零点重复出现, 出现次数与阶数相同), 则

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{Q_n(z)},$$

其中  $Q_n(z) = \left(\frac{z}{z_n}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{\lambda_n} \left(\frac{z}{z_n}\right)^{\lambda_n}$  ( $n = 1, 2, \cdots$ );  $\{\lambda_n\}$  为使级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{|z_n|}\right)^{\lambda_n+1} \quad (R \text{ 为任意正的常数})$$

收敛的正整数数列;  $g(z)$  为一个整函数.

取任一正数  $R$ , 在  $|z| < R$  内考虑级数

$$\sum_{|z_n| > 2R} \ln \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{Q_n(z)},$$

令

$$u_n(z) = \ln \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{Q_n(z)},$$

则

$$\begin{aligned} |u_n(z)| &= \left| \ln \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) + Q_n(z) \right| \\ &\leq \left| \frac{z}{z_n} \right|^{\lambda_n+1} \left(1 + \left| \frac{z}{z_n} \right| + \left| \frac{z}{z_n} \right|^2 \cdots\right) \\ &< \left(\frac{R}{|z_n|}\right)^{\lambda_n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) \\ &= 2 \left(\frac{R}{|z_n|}\right)^{\lambda_n+1}. \end{aligned}$$

因此  $\sum_{|z_n| > 2R} \ln \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{Q_n(z)}$  在  $|z| < R$  内一致收敛. 由关系式

$$\prod_{|z_n| > 2R} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{Q_n(z)} = \exp \left( \sum_{|z_n| > 2R} \ln \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{Q_n(z)} \right)$$

可知

$$\prod_{|z_n| > 2R} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{Q_n(z)}$$

在  $|z| < R$  内一致收敛于一个解析函数, 从而

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{Q_n(z)}$$

在  $|z| < R$  内是一个解析函数  $G(z)$  且有零点  $z_1, z_2, \dots, z_k$  (其中  $|z_k| < R \leq |z_{k+1}|$ )。因  $R$  是任意大正数, 故无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{Q_n(z)}$$

在整个复平面内一致收敛于解析函数  $G(z)$ , 且仅以  $z_1, z_2, \dots$  为零点。令

$$F(z) = \frac{f(z)}{G(z)}$$

则  $F(z)$  为无零点的整函数, 故可表示为  $e^{g(z)}$  的形式, 其中  $g(z)$  为整函数。则

$$f(z) = F(z)G(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{Q_n(z)}$$

若  $z = 0$  是  $f(z)$  的  $\mu$  级零点, 则

$$\frac{f(z)}{z^\mu} = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{Q_n(z)},$$

故

$$f(z) = e^{g(z)} z^\mu \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{Q_n(z)}. \quad \square$$

**注 5.6.1.** 以上分解式不唯一, 因为  $\{\lambda_n\}$  选择不唯一的。如果可以选取每个  $\lambda_n$  都等于一个整数  $p$ , 同时  $p$  又是使级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|z_n|}\right)^{p+1}$$

收敛的最小正数, 则分解唯一。此时分解式中的乘积称为  $\{z_n\}$  的**典范乘积**。且这个  $p$  称为这个**典范乘积的亏格**。

7. 证明: 插值定理对于一般的域成立。

证明. 以下证明来自[9]P<sub>88</sub>。

**定理 5.6.2 (插值定理).** 若  $z_1, z_2, \dots$  为  $\mathbb{C}$  中的一个离散点集,  $n_1, n_2, \dots$  为一个正整数序列,  $a_{j,k}$  ( $j \geq 1; 0 \leq k \leq n_j - 1$ ) 为复数序列, 则一定存在一个整函数  $g(z)$ , 使得

$$g^{(k)}(z_j) = k! a_{j,k} \quad (j \geq 1; 0 \leq k \leq n_j - 1)$$

成立。即：如果预先给定一个点列  $\{z_j\}$  及每一点  $z_j$  上的 Taylor 展开式的开始  $n_j$  项, 则一定存在一个整函数, 在这些点上有这样的 Taylor 展开式。

由Weierstrass 因子分解定理, 可以找到整函数  $f(z)$ , 使得  $f(z)$  在  $z = z_j$  处为  $n_j$  重零点。由于  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  为一个离散序列, 故可以找到正数序列  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ , 使得以  $z_j$  为中心、 $2\varepsilon_j$  为半径的圆  $D(z_j, 2\varepsilon_j)$  相互之间不相交。作

$$P_j(z) = \sum_{0 \leq k \leq n_j - 1} a_{j,k} (z - z_j)^k \quad (j \geq 1).$$

对每个  $j$ , 作  $\varphi_j \in C^\infty$ , 使得  $\varphi_j$  的支集在  $D(z_j, 2\varepsilon_j)$  之中, 且  $0 \leq \varphi_j \leq 1$ , 而在  $\overline{D}(z_j, \varepsilon_j)$  上  $\varphi_j \equiv 1$  ( $j = 1, 2, \dots$ )。令  $\psi(z) \in C^\infty$ , 作函数

$$g(z) = \sum_{j \geq 1} P_j(z) \varphi_j(z) - f(z) \psi(z). \quad (5.1)$$

由于  $\varphi_j$  的支集在  $\mathbb{C}$  上互不相交, 故对每一点  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\sum_{j \geq 1} P_j(z) \varphi_j(z)$  中最多只有一项不为零, 故这个和式是有意义的。我们要求出  $\psi$ , 使得  $g(z)$  是一个整函数, 即要求  $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$ 。当  $z \in \mathbb{C}$  时, 此即

$$\sum_{j \geq 1} P_j(z) \frac{\partial \varphi_j(z)}{\partial \bar{z}} = f(z) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}.$$

令  $h(z) = \sum_{j \geq 1} P_j(z) \frac{\partial \varphi_j(z)}{\partial \bar{z}}$ , 则在  $\bigcup_j \overline{D}(z_j, \varepsilon_j)$  上  $h(z) \equiv 0$ 。在  $z = z_j$  处, 取  $\frac{h(z)}{f(z)} = 0$ , 则  $\frac{h(z)}{f(z)}$  在  $\mathbb{C}$  上是  $C^\infty$  的。 $h$  有互不相交的紧致支集。且我们知道  $\bar{\partial}$  问题  $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = \frac{h}{f}$  有一个  $C^\infty$  的解  $\psi$ 。取这样的  $\psi$ , 则  $g(z)$  为整函数, 在  $\bigcup_j \overline{D}(z_j, \varepsilon_j)$  上,  $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = 0$ , 故  $\psi$  在  $z_j$  的附近是全纯的。由于  $f(z)$  在  $z = z_j$  有  $n_j$  重零点, 直接计算验证: 当  $0 \leq k \leq n_j - 1$  时

$$g^{(k)}(z_j) = P_j^{(k)}(z_j) = k! a_{j,k}$$

成立, 故定理得证。 □

## 5.7 特殊域上的Mittag-Leffler定理、Weierstrass因子分解定理和Blaschke乘积

1. 用极点处Laurent级数的主要部分表示下列 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数:

- (i)  $\frac{1}{e^z-1}$ ; (ii)  $\frac{1}{\cos z}$ ; (iii)  $\tan z$ ; (iv)  $\frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$ .

证明. □

2. 将下列整函数进行因子分解: (i)  $e^z - 1$ ; (ii)  $e^{az} - e^{bz}$ ; (iii)  $\cos z$ ; (iv)  $\cos z - \sin z$ .

证明. □

3. 设 $\{a_n\}$ 是 $B(0, R) \setminus \{0\}$ 中互不相同的点列,  $\{b_n\}$ 是点列 $\{a_n\}$ 关于圆周 $\partial B(0, R)$ 的对称点列,  $\{k_n\}$ 是自然数列. 证明: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} k_n(R - |a_n|) < \infty$ , 则

$$\left\{ \prod_{j=1}^n \left( \frac{z - a_j}{z - b_j} \right)^{k_j} \right\}$$

在 $B(0, R)$ 上内闭一致收敛于一个全纯映射 $f: B(0, R) \rightarrow B(0, 1)$ , 使得 $f$ 恰以 $\{a_n\}$ 为其零点集, 且 $f$ 在每个 $a_n$ 处的零点阶数恰为 $k_n$ .

证明. □

4. 设 $\{a_n\}$ 是 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 中互不相同的点列,  $\{k_n\}$ 是自然数列. 证明: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{|a_n|}$ 收敛, 则

$$\left\{ \prod_{j=1}^n \left( 1 - \frac{z}{a_j} \right)^{k_j} \right\}$$

在 $\mathbb{C}$ 上内闭一致收敛于一个整函数 $f$ , 使得 $f$ 恰以 $\{a_n\}$ 为其零点集, 且 $f$ 在每个 $a_n$ 处的零点阶数恰为 $k_n$ .

提示:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{z - a_n}$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ 上内闭一致收敛.

证明. □

5. 设 $\{a_n\}$ 是 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 中互不相同的点列,  $\{k_n\}$ 是自然数列. 证明: 若存在自然数 $m$ , 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{|a_n|^{m+1}}$ 收敛, 则

$$\left\{ \prod_{j=1}^n \left[ \left( 1 - \frac{z}{a_j} \right) e^{\frac{z}{a_j} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{a_j} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{m} \left( \frac{z}{a_j} \right)^m} \right]^{k_j} \right\}$$

在 $\mathbb{C}$ 上内闭一致收敛于一个整函数 $f$ , 使得 $f$ 恰以 $\{a_n\}$ 为其零点集, 且 $f$ 在每个 $a_n$ 处的零点阶数恰为 $k_n$ .

提示:  $\sum_{n=1}^{\infty} k_n \left( \frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \cdots + \frac{z^{m-1}}{a_n^m} \right)$  在 $\mathbb{C} \setminus \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  上内闭一致收敛.

证明. 这是第六题的推论, 可以参考[2]P<sub>153</sub>定理7. □

6. 设 $\{a_n\}$ 是 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 中互不相同的点列,  $\{k_n\}$ 是自然数列. 证明: 若存在自然数列 $\{p_n\}$ , 使得全纯函数项级数

$$\sum_{m=1}^{\infty} k_n \left( \frac{z}{a_n} \right)^{p_n+1}$$

在 $\mathbb{C}$ 上绝对收敛, 则

$$\left\{ \prod_{j=1}^n \left[ \left( 1 - \frac{z}{a_j} \right) e^{\frac{z}{a_j} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{a_j} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{p_j} \left( \frac{z}{a_j} \right)^{p_j}} \right]^{k_j} \right\}$$

在 $\mathbb{C}$ 上内闭一致收敛于一个整函数 $f$ , 使得 $f$ 恰以 $\{a_n\}$ 为其零点集, 且 $f$ 在每个 $a_n$ 处的零点阶数恰为 $k_n$ .

提示:  $\sum_{n=1}^{\infty} k_n \left( \frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \cdots + \frac{z^{p_n-1}}{a_n^{p_n}} \right)$  在 $\mathbb{C} \setminus \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  上内闭一致收敛.

证明. □

7. 设 $\{a_n\}$ 是 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 中互不相同的点列,  $\{k_n\}$ 是自然数列. 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ , 则

$$\left\{ \prod_{j=1}^n \left[ \left( 1 - \frac{z}{a_j} \right) e^{\frac{z}{a_j} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{a_j} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{j k_j} \left( \frac{z}{a_j} \right)^{j k_j}} \right]^{k_j} \right\}$$

在 $\mathbb{C}$ 上内闭一致收敛于一个整函数 $f$ , 使得 $f$ 恰以 $\{a_n\}$ 为其零点集, 且 $f$ 在每个 $a_n$ 处的零点阶数恰为 $k_n$ .

证明. □

8. 设 $f$ 是非常数的整函数,  $f$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 中的互不相同的零点集是 $\{a_n\}$ , 其相应的零点阶数为 $\{k_n\}$ ,  $k_0 = \text{Res} \left( \frac{f'(z)}{f(z)}, 0 \right)$ . 证明: 一定存在整函数 $g$ , 使得

$$f(z) = e^{g(z)} z^{k_0} \prod_{n=1}^{\infty} \left[ \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{a_n} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{n k_n} \left( \frac{z}{a_n} \right)^{n k_n}} \right]^{k_n}.$$

证明. □

9. 设 $f$ 是有理函数,  $\infty$ 是 $f$ 的至少2阶的零点, 并且 $f$ 的全部互不相同的极点 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 都不是整数. 证明:

$$(i) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{k=1}^m \operatorname{Res} \left( f(z) \cot \pi z, a_k \right); \quad (ii) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\pi \sum_{k=1}^m \operatorname{Res} \left( \frac{f(z)}{\sin \pi z}, a_k \right).$$

证明. □

$$10. \text{ 求下列级数的和: } (i) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2}, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(a+n)^2} \text{ (} a \text{ 不是整数); } (ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} \\ (a > 0); \quad (iii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}; \quad (iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{)}.$$

证明. □

11. 设 $f$ 是 $B(0, R)$ 上非常数的有界全纯函数,  $\{a_n\}$ 是 $f$ 在 $B(0, R) \setminus \{0\}$ 中的互不相同的零点集,  $\{k_n\}$ 是相应的零点阶数. 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n (R - |a_n|) < \infty.$$

证明. □

12. 设 $f$ 是 $B(0, R)$ 上非常数的有界全纯函数,  $f$ 在 $B(0, R) \setminus \{0\}$ 中的全部互不相同的零点集为 $\{a_n\}$ , 相应的零点阶数为 $\{k_n\}$ ,  $k_0 = \operatorname{Res} \left( \frac{f'(z)}{f(z)}, 0 \right)$ . 证明: 一定存在 $B(0, R)$ 上无零点的有界全纯函数 $g$ , 使得

$$f(z) = g(z) z^{k_0} \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R(a_n - z)}{R^2 - \overline{a_n} z} \right)^{k_n} \left( \frac{|a_n|}{a_n} \right)^{k_n}, \quad \forall z \in B(0, R).$$

证明. □

## 第6章 全纯开拓

### 6.1 Schwarz对称原理

1. 设域 $D$ 关于 $x$ 轴对称,  $f$ 在 $D$ 上亚纯,  $f(D \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . 证明: 若 $z_0 \in D$ 是 $f$ 的极点, 则 $\bar{z}_0$ 也是 $f$ 的极点, 并且

$$\operatorname{Res}(f, \bar{z}_0) = \overline{\operatorname{Res}(f, z_0)}.$$

证明.

□

2. 设域 $D$ 关于圆周 $\partial B(a, r)$ 对称,  $f$ 在 $D$ 上亚纯,  $f(D \cap \partial B(a, r)) \subset \partial B(A, R)$ . 证明: 若 $z_0, w_0 \in D$ 关于 $\partial B(a, r)$ 对称,  $z_0$ 是 $f(z) - A$ 的1阶零点, 则 $w_0$ 是 $f$ 的1阶极点, 并且

$$\operatorname{Res}(f, w_0) = -\frac{R^2(w_0 - a)^2}{r^2 f'(z_0)}.$$

证明.

□

3. 设 $0 < r < R < \infty$ ,  $f$ 在 $B(0, R) \setminus \overline{B(0, r)}$ 上全纯, 在 $B(0, R) \setminus B(0, r)$ 上连续. 证明: 若 $f$ 在 $\partial B(0, r)$ 上恒为零, 则在 $B(0, R) \setminus \overline{B(0, r)}$ 上也恒为零.

4. 设 $\gamma$ 是圆周 $\partial B(a, R)$ 上的一段开圆弧. 证明: 若 $f$ 在 $B(a, R)$ 上全纯, 在 $B(a, R) \cup \gamma$ 上连续, 并且在 $\gamma$ 上恒为零, 则 $f$ 在 $B(a, R)$ 上也恒为零.

证明.

□

5. 将如图 6.1 所示的单连通域 $D$ 双全纯地映为上半平面.

证明.

□

6. 利用Schwarz对称原理证明: 若 $f$ 双全纯地将 $B(a, r)$ 映为 $B(A, R)$ , 同胚地将 $\overline{B(a, r)}$ 映为 $\overline{B(A, R)}$ , 则 $f$ 必是分式线性变换.

证明.

□

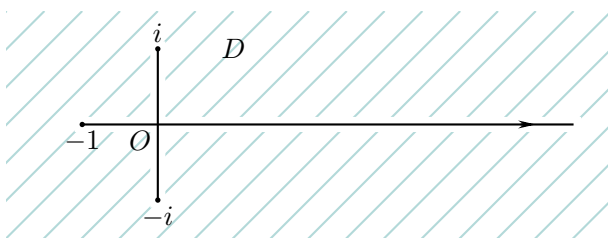


图 6.1

7. 设  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是关于  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的多项式,  $f \in H(B(0, r)), \rho > 1$ . 证明: 若在圆盘  $B(0, r)$  上成立  $f(z) = P(f(\frac{z}{\rho}), f'(\frac{z}{\rho}), \dots, f^{(n-1)}(\frac{z}{\rho}))$ , 则  $f$  必能全纯开拓到  $\mathbb{C}$ .

证明.

□

8. 将如图 6.2 所示的单连通域  $D = (\mathbb{C} \setminus [2, \infty)) \setminus (\overline{B(1, 1)} \cup \overline{B(-1, 1)})$  双全纯地映为上半平面.

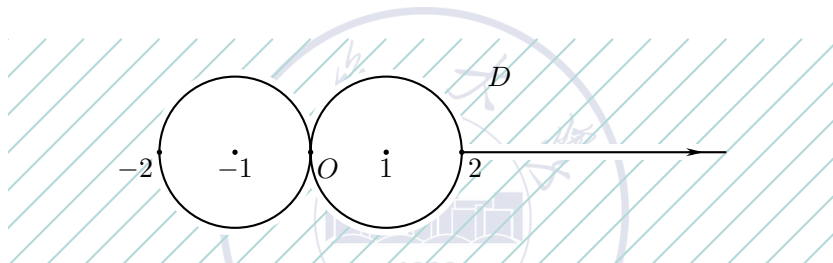


图 6.2

证明.

□

9. 设  $0 < a < \infty, L_k = \{z = k\pi + \frac{\pi}{2} + iy, -a \leq y \leq a\}, D = (\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \infty))) \setminus (\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} L_k)$  是如图 6.3 所示的单连通域, 将  $D$  双全纯地映为上半平面.

证明.

□

10. 设  $L_k = \{z = k\pi + iy : 0 \leq y < \infty\}, D = \mathbb{C} \setminus (\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} L_k)$  是如图 6.4 所示的单连通域, 将  $D$  双全纯地映为上半平面.

证明.

□

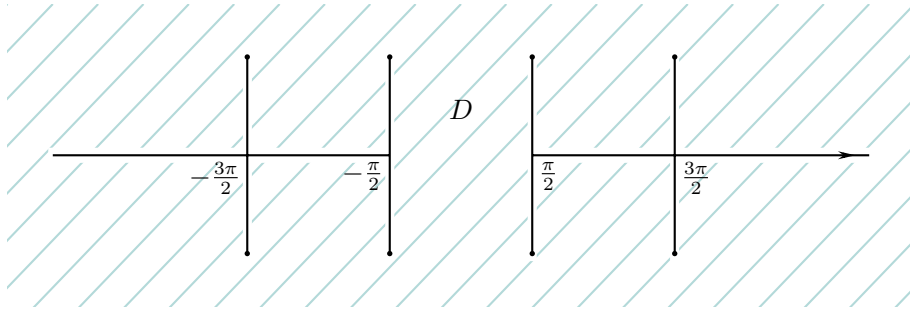


图 6.3

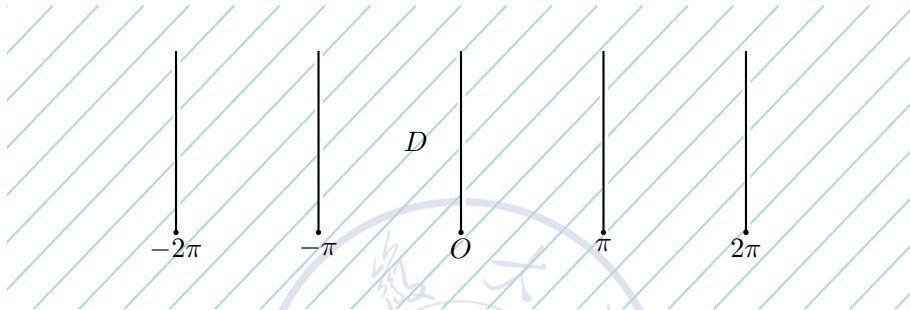


图 6.4

11. 设  $D$  是由 3 条与  $\partial B(0, 1)$  正交的圆弧所围成的单连通域, 如图 6.5 所示. 证明: 若  $\varphi$  双全纯地将  $D$  映为上半平面  $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ , 同胚地将  $\bar{D}$  映为  $\overline{\mathbb{C}^+}$ ,  $A, B, C$  分别映为  $0, 1, \infty$ , 则  $\varphi$  可全纯开拓到  $B(0, 1)$ , 并且  $\varphi(B(0, 1)) = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ .

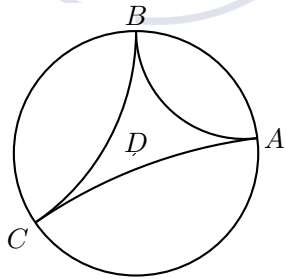


图 6.5

证明.

□

## 6.2 幂函数的全纯开拓

1. 证明: 幂级数收敛圆周上的点是否为其和函数的奇点, 与该幂级数的前有限项无关.

证明.

□

2. 证明: 若幂级数的收敛圆周上有其和函数的极点, 则该幂级数在其收敛圆周上处处发散.

证明.

□

3. 证明: 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  的和函数在其收敛圆周上有1阶极点  $z_0$ , 此外再无其他奇点, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0.$$

证明.

□

4. 设  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  的收敛半径为1,  $F(w) = f\left(\frac{w}{1+w}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$  的收敛半径为  $\rho$ . 证明:  
 (i)  $\rho \geq \frac{1}{2}$ , 并且  $-1$  是  $f(z)$  的奇点当且仅当  $\rho = \frac{1}{2}$ ; (ii) 若  $\frac{1}{2} < \rho < 1$ , 则  $f(z)$  能全纯开拓到  $B\left(-\frac{\rho^2}{1-\rho^2}, \frac{\rho^2}{1-\rho^2}\right)$ ; (iii) 若  $\rho = 1$ , 则  $f(z)$  能全纯开拓到  $\left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\right\}$ ; (iv) 若  $\rho > 1$ , 则  $f(z)$  能全纯开拓到  $\mathbb{C} \setminus \overline{B\left(\frac{\rho^2}{\rho^2-1}, \frac{\rho^2}{\rho^2-1}\right)}$ ; (v) 若  $\rho = \infty$ , 则  $f(z)$  能全纯开拓到  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ .

证明.

□

5. 设  $D$  是域. 证明: 存在  $f \in H(D)$ , 使得  $\partial D$  中的每个点皆是  $f$  的奇点.

证明.

□

6. 证明:  $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$  的收敛圆周上的每个点皆为其和函数的奇点.

证明.

□

7. 证明:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{2^n}$  的收敛圆周上的每个点皆为其和函数的奇点.

证明.

□

8. 设  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  的收敛半径为1,  $a_n$  ( $n \geq 0$ ) 是实数,  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ . 证明: 若  $S_n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 则1是  $f(z)$  的奇点. 举例说明, 仅仅  $|S_n| \rightarrow \infty$  不能保证1是  $f(z)$  的奇点.

提示: 考虑  $\frac{f(z)}{1-z}$ .

证明. □

9. 证明：若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  的收敛半径为1，其和函数在  $\partial B(0, 1)$  上有1阶极点  $z_1, z_2, \dots, z_m$ ，此外再无其他奇点，则  $\{a_n\}$  有界.

证明. □

10. 设  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  的收敛半径为1，并且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . 证明：若  $z_0 \in \partial B(0, 1)$  不是  $f(z)$  的奇点，则  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$  收敛.

证明. □



## 6.3 多值全纯函数与单值性定理

1. 设  $f$  是域  $D$  上的全纯函数,  $z_0 \in D$ . 证明:

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

是  $D$  上的多值全纯函数. 这里, 积分是沿  $D$  中连接  $z_0$  和  $z$  的任意可求长曲线进行的.

证明. □

2. 证明: 若  $f$  是域  $D$  上非常数的全纯函数, 但不是局部双全纯的, 则  $f^{-1}$  一定不是域  $G = f(D)$  上的多值全纯函数.

证明. □

3. 举例说明, 存在  $B(0, 1)$  上的局部双全纯映射  $f$ , 使得  $f^{-1}$  不是域  $G = f(B(0, 1))$  上的多值全纯函数.

证明. □

4. 证明: 不存在  $B(0, 1)$  上的局部双全纯映射  $f$ , 使得  $f(B(0, 1)) = \mathbb{C}$ , 并且  $f^{-1}$  是  $\mathbb{C}$  上的多值全纯函数.

证明. □

5. 证明: 不存在  $B(0, 1)$  上的局部双全纯映射  $f$ , 使得  $f(B(0, 1)) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$ , 并且  $f^{-1}$  是  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$  上的多值全纯函数. 这里,  $a$  是  $\mathbb{C}$  中的一个固定点.

证明. □

6. 求

$$f(z) = z^{\frac{1}{2}} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{1}{2} \arg z} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (z-1)^k$$

沿单位圆周  $\partial B(0, 1)$  的正向和反向的全纯开拓.

证明. □

7. 设幂级数族  $\{P_t : \alpha \leq t \leq \beta\}$  给出了沿平面曲线  $z = \gamma(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ) 的全纯开拓. 证明:  $P_t$  的收敛半径  $R(t)$  或者在  $[\alpha, \beta]$  上恒为  $\infty$ , 或者是  $[\alpha, \beta]$  上的正值连续函数.

证明. □

## 第7章 共形映射

### 7.1 正规族

1. 设 $\{f_n\}$ 是域 $D$ 上的全纯函数列, 并且在 $D$ 上内闭一致有界. 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ 在 $D$ 上处处存在, 则 $\{f_n\}$ 在 $D$ 上内闭一致收敛.

证明.

□

2. 设 $\{f_n\}$ 是域 $D$ 上的全纯函数列, 并且在 $D$ 上内闭一致有界,  $A = \{z = x + iy \in D : x, y \text{ 为有理数}\}$ . 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ 在 $A$ 上处处存在, 则 $\{f_n\}$ 在 $D$ 上内闭一致收敛.

证明.

□

3. (**Vitali定理**) 设 $\{f_n\}$ 是域 $D$ 上的全纯函数列, 并且在 $D$ 上内闭一致有界,  $\{z_n\}$ 是 $D$ 中彼此不同的点列,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \in D$ . 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ 在 $\{z_n\}$ 上处处存在, 则 $\{f_n\}$ 在 $D$ 上内闭一致收敛.

证明.

□

4. 设 $\mathcal{F}$ 是域 $D$ 上的全纯函数族,  $z_0 \in D$ . 证明: 若 (i)  $\operatorname{Re} f(z) \geq 0, \forall z \in D, f \in \mathcal{F}$ ; (ii)  $f(z_0) = g(z_0), \forall f, g \in \mathcal{F}$ , 则 $\mathcal{F}$ 是 $D$ 上的正规族. 并举例说明条件(ii)是不可去掉的.

证明.

□

5. 设 $\mathcal{F}$ 是域 $D$ 上的正规全纯函数族,  $g$ 是整函数. 证明:  $\{g \circ f : f \in \mathcal{F}\}$ 也是 $D$ 上的正规族.

证明.

□

6. 设 $D$ 是有界域,  $0 < M < \infty$ . 证明:

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in H(D) : \iint_D |f(z)|^2 dx dy \leq M \right\}$$

是 $D$ 上的正规族.

证明.

□

7. 设 $\{f_n\}$ 是域 $D$ 上的全纯函数列, 并且在 $D$ 上内闭一致有界. 证明: 若存在 $z_0 \in D$ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_0) = A$ 存在, 并且 $f_n(D) \subset \mathbb{C} \setminus \{A\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), 则 $\{f_n\}$ 在 $D$ 上内闭一致收敛于常数 $A$ .

证明.

□



## 7.2 Riemann映射定理

1. (推广的Liouville定理) 设 $D$ 是异于 $\mathbb{C}$ 的单连通域. 证明: 若 $f$ 是整函数, 并且 $f(\mathbb{C}) \subset D$ , 则 $f$ 是常值函数.

证明. □

2. 设 $D$ 是异于 $\mathbb{C}$ 的单连通域,  $a \in D$ . 证明: 若 $f$ 将 $D$ 双全纯地映为 $B(0, 1)$ , 并且 $f(a) = 0, f'(a) > 0$ , 则

$$\min_{z \in \partial D} |z - a| \leq \frac{1}{f'(a)} \leq \max_{z \in \partial D} |z - a|.$$

称 $\frac{1}{f'(a)}$ 为 $D$ 在 $a$ 处的映射半径.

证明. □

3. 设 $D$ 是异于 $\mathbb{C}$ 的单连通域,  $a \in D$ ,  $f$ 将 $D$ 双全纯地映为 $B(0, 1)$ , 并且 $f(a) = 0, f'(a) > 0$ . 证明: 若 $g$ 将 $D$ 双全纯地映为 $B(0, 1)$ ,  $p = g^{-1}(0)$ , 则

$$g(z) = \frac{g'(a)}{|g'(a)|} \frac{f(z) - f(p)}{1 - \overline{f(p)}f(z)}.$$

证明. □

4. 设 $D$ 为异于 $\mathbb{C}$ 的凸域,  $a \in D$ ,  $\mathcal{F} = \{f \in H(D) : f(a) = 0, f'(a) > 0\}$ . 证明:  $\mathcal{F}$ 中满足 $f(D) = B(0, 1)$ 和 $\operatorname{Re} f'(z) \geq 0$  ( $\forall z \in D$ ) 的 $f$ 最多只有一个.

证明. □

5. 设 $D$ 是异于 $\mathbb{C}$ 的单连通域,  $a \in D$ ,  $R$ 为 $D$ 在 $a$ 处的映射半径. 证明: 若 $F \in H(D)$ ,  $F(a) = 0, F'(a) = 1$ , 则 $\sup_{z \in D} |F(z)| \geq R$ . 等号成立当且仅当 $F$ 是将 $D$ 映为 $B(0, R)$ 的双全纯映射.

证明. □

6. 证明: (i) 存在 $B(0, 1)$ 上的全纯函数 $f$ , 使得 $f(B(0, 1)) = \mathbb{C}$ ;  
(ii) 对于 $a \in \mathbb{C}$ , 存在 $B(0, 1)$ 上的全纯函数 $f$ , 使得 $f(B(0, 1)) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$ .  
并将这里的结论与习题6.4的第3题和第4题作比较.

证明. □

7. 设 $D$ 是异于 $\mathbb{C}$ 的单连通域,  $a \in D$ ,  $R$ 为 $D$ 在 $a$ 处的映射半径. 证明: 若 $F \in H(D)$ ,  $F(a) = 0, F'(a) = 1$ , 则

$$\iint_D |F'(z)|^2 dx dy \geq \pi R^2.$$

等号成立当且仅当 $F$ 是将 $D$ 映为 $B(0, R)$ 的双全纯映射.

证明.

□



## 7.3 边界对应定理

1. 利用Schwarz对称原理和边界对应定理证明: 将 $B(0, 1)$ 映为自身的双全纯映射一定是分式线性变换.

证明.

□

2. 证明: 若 $f$ 将圆环 $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$ 双全纯地映为圆环 $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$ , 则 $f$ 将闭圆环 $\{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$ 同胚地映为闭圆环 $\{z \in \mathbb{C} : R_1 \leq |z| \leq R_2\}$ .

证明.

□

3. 设 $D$ 是由简单闭曲线所围成的单连通域,  $z_1, z_2, z_3 \in \partial D$ 是彼此不同的三点, 按 $\partial D$ 的正向排列. 证明: 若 $w_1, w_2, w_3 \in \partial B(0, 1)$ 是彼此不同的三点, 按 $\partial B(0, 1)$ 的正向排列, 则存在唯一的 $f$ , 将 $D$ 双全纯地映为 $B(0, 1)$ , 将 $\overline{D}$ 同胚地映为 $\overline{B(0, 1)}$ , 并且 $f(z_k) = w_k, k = 1, 2, 3$ .

证明.

□

4. (边界对应原理) 设 $D$ 是由简单闭曲线 $\gamma$ 所围成的单连通域 ( $\gamma$ 不必可求长),  $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$ . 证明: 若 $f$ 将 $\gamma$ 一一地映为简单闭曲线 $\Gamma$ , 则 $f$ 将 $D$ 双全纯地映为由 $\Gamma$ 所围成的单连通域 $G$ . 将这里的结论与习题4.4中的第17题作比较.

证明.

□

5. 设 $f \in H(B(0, 1)), f(0) = 0, f'(0) = a > 0$ . 证明: 若 $f(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$ , 则 $f$ 在 $B(0, \frac{a}{1+\sqrt{1-a^2}})$ 上双全纯.

证明.

□

## 7.4 Schwarz-Christoffel公式

1. 设  $L_k = \{z = re^{i\frac{2k\pi}{n}} : 1 \leq r < \infty\}$ ,  $G = \mathbb{C} \setminus (\bigcup_{k=1}^n L_k)$ . 求出将上半平面映为  $G$  的双全纯映射  $\varphi$ , 使得  $\varphi(i) = 0$ .

$$\left( \varphi(z) = \frac{z^2 + 1}{\left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} z^{n-2k} \right)^{\frac{2}{n}}} \right)$$

证明. □

2. 证明: 将  $B(0, 1)$  映为  $n$  角形内部的双全纯映射  $\varphi$  具有形状

$$\varphi(z) = C_0 \int_{z_0}^z \prod_{k=1}^n (\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1} d\zeta + C_1,$$

其中,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \partial B(0, 1)$  是与该  $n$  角形顶点相对应的点;  $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$  是该  $n$  角形的内角;  $z_0 \in B(0, 1)$ .

证明. □

3. 设  $G$  是正  $n$  角形,  $O$  是它的中心,  $1$  是它的一个顶点. 求出将  $B(0, 1)$  映为  $G$  的双全纯映射  $\varphi$ , 使得  $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) > 0$ .

$$\left( \varphi(z) = \frac{n}{B(\frac{1}{n}, 1 - \frac{2}{n})} \int_0^z (1 - \zeta^n)^{-\frac{2}{n}} d\zeta \right)$$

证明. □

4. 证明: 将上半平面映为  $\mathbb{C}_\infty$  中的  $n$  角形外部的单叶亚纯函数  $\varphi$  具有形状

$$\varphi(z) = C_0 \int_{z_0}^z \prod_{k=1}^n (\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1} \frac{1}{(\zeta - a_0)(\zeta - \bar{a}_0)} d\zeta + C_1,$$

其中,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  是与该  $n$  角形顶点相对应的点;  $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$  是该  $n$  角形的外角;  $a_0 = \varphi^{-1}(\infty), \operatorname{Im} z_0 > 0$ .

证明. □

5. 设  $G = \mathbb{C}_\infty \setminus ([0, 1] \cup [0, e^{i\frac{2\pi}{3}}] \cup [0, e^{-i\frac{2\pi}{3}}])$ ,  $\operatorname{Im} z_0 > 0$ . 求出将上半平面映为  $G$  的单叶亚纯映射  $\varphi$ , 使得  $\varphi(z_0) = \infty$ .

$$\left( \varphi(z) = \frac{[(z - z_0)^3 - 3y_0^2(z - x_0)]^{\frac{2}{3}}}{(z - x_0)^2 + y_0^2} \right)$$

证明. □

6. 设  $L_1, L_2, \dots, L_n$  是以  $O$  为端点的  $n$  条线段, 它们彼此仅在  $O$  处相交,  $\operatorname{Im} a_0 > 0$ . 证明: 将上半平面映为  $G = \mathbb{C}_\infty \setminus \left( \bigcup_{k=1}^n L_k \right)$ , 并且将  $a_0$  映为  $\infty$  的单叶亚纯函数  $\varphi$  具有形状

$$\varphi(z) = C \frac{\prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k}}{(z - a_0)(z - \overline{a_0})},$$

其中,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$ , 并且  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 2$ .

证明. □



## 第8章 调和函数与次调和函数

### 8.1 平均值公式与极值原理

1. 证明: 若 $u$ 是域 $D$ 上的调和函数, 则 $\frac{\partial^{j+k}u}{\partial x^j \partial y^k}$ 也是 $D$ 上的调和函数 ( $j, k = 0, 1, 2, \dots$ ).

证明.

□

2. 证明: 若 $u$ 是域 $D$ 上的调和函数, 则 $\frac{\partial u}{\partial z}$ 是 $D$ 上的全纯函数.

证明.

□

3. 设 $f(z)$ 是域 $D$ 上非常数的全纯函数, 并且在 $D$ 上不取零值. 证明: (i)  $\log |f(z)|$ 在 $D$ 上调和; (ii)  $|f(z)|^p$ 在 $D$ 上不调和,  $p > 0$ .

证明.

□

4. 证明: 若域 $D$ 上的调和函数列 $\{u_n(z)\}$ 在 $D$ 上内闭一致收敛于 $u(z)$ , 则 $u(z)$ 也是 $D$ 上的调和函数, 并且 $\left\{\frac{\partial^{j+k}u_n(z)}{\partial x^j \partial y^k}\right\}$ 在 $D$ 上内闭一致收敛于 $\left\{\frac{\partial^{j+k}u(z)}{\partial x^j \partial y^k}\right\}$ .

证明.

□

5. 证明: 若 $u$ 是域 $D$ 上非常数的调和函数, 则 $u(D)$ 是开区间.

证明.

□

6. 利用上题的结论证明: 若 $u$ 是域 $D$ 上非常数的调和函数, 则 $u$ 不能在 $D$ 内部取得极大值和极小值, 自然不能在 $D$ 内部取得最大值和最小值.

证明.

□

7. 设 $u(z)$ 在 $B(0, 1)$ 上调和, 并且对任意 $z_0 \in \partial B(0, 1)$ , 成立 $\lim_{r \rightarrow 1} u(rz_0) = 0$ , 是否可以断言 $u(z) \equiv 0$ ?

(提示: 举例说明答案是否定的.)

证明. □

8. 设 $u$ 是 $B(0, 1)$ 上的非负调和函数,  $u(0) = 1$ , 给出 $u\left(\frac{1}{2}\right)$ 的最佳估计.

证明. □

9. 设 $D$ 是域,  $E \subset D$ 是紧集,  $a \in E$ . 证明: 若 $u$ 是 $D$ 上的非负调和函数, 则必存在仅与 $a, E, D$ 有关的常数 $\varepsilon \in (0, 1)$ , 使得

$$\varepsilon u(a) \leq u(z) \leq \frac{1}{\varepsilon} u(a).$$

证明. □

10. (Harnack定理) 设 $\{u_n\}$ 是域 $D$ 上单调增加的调和函数列. 证明: 若存在 $z_0 \in D$ , 使得 $\{u_n(z_0)\}$ 有界, 则 $\{u_n\}$ 在 $D$ 上内闭一致收敛.

证明. □

11. 设 $D$ 是由有限条光滑简单闭曲线围成的域,  $\mathbf{n}$ 是 $\partial D$ 的单位法向量场, 指向 $D$ 的外部,  $u, v$ 在 $\bar{D}$ 上调和. 证明:

$$(i) \int_{\partial D} \frac{\partial v(z)}{\partial \mathbf{n}} |dz| = 0; \quad (ii) \int_{\partial D} u(z) \frac{\partial v(z)}{\partial \mathbf{n}} |dz| = \int_{\partial D} v(z) \frac{\partial u(z)}{\partial \mathbf{n}} |dz|; \quad (iii) \iint_D \left[ \left( \frac{\partial u(z)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u(z)}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \int_{\partial D} u(z) \frac{\partial u(z)}{\partial \mathbf{n}} |dz|.$$

证明. □

12. 设 $u_1, u_2, \dots, u_n$ 是域 $D$ 上的调和函数. 证明: 若 $|u_1(z)| + |u_2(z)| + \dots + |u_n(z)|$ 能在 $D$ 内部取得极大值, 则 $u_1, u_2, \dots, u_n$ 全部都是常值函数.

证明. □

13. (调和函数的Hadamard三圆定理) 设 $0 < r_1 < r_2 < \infty, D = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$ ,  $u$ 在 $D$ 上调和, 在 $\bar{D}$ 上连续,  $A(r) = \max_{|z|=r} u(z)$  ( $r_1 \leq r \leq r_2$ ). 证明:  $A(r)$ 在 $[r_1, r_2]$ 上是 $\log r$ 的凸函数, 即

$$A(r) \leq \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} A(r_1) + \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} A(r_2).$$

证明. □

14. 设 $\varphi \in C^2((0, 1))$ . 证明:  $\varphi(|z|)$ 在 $B(0, 1) \setminus \{0\}$ 上调和, 当且仅当存在实数 $a$ 和 $b$ , 使得 $\varphi(|z|) = a \log |z| + b$ .

证明. □

15. 设 $D$ 是凸域,  $u$ 是 $D$ 上的调和函数. 证明: 若当 $z \in D$ 时总有 $u(z) \geq 0$ , 则必存在 $D$ 上的双全纯映射 $f$ , 使得 $\operatorname{Re} f'(z) = u(z)$ .

证明. □

16. 设 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 是 $n$ 条可求长曲线,  $u$ 是域 $D$ 上的连续函数. 若 $u$ 在开集 $D \setminus (\bigcup_{k=1}^n \gamma_k)$ 上调和, 问 $u$ 是否在 $D$ 上调和?

提示: 举例说明答案是否定的.

证明. □

17. 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是实数. 证明: 若 $p(\theta) = \sum_{k=1}^n a_k \cos k\theta$ 在 $[0, \pi]$ 上单调减少, 则

$$\sum_{k=1}^n a_k \sin k\theta \geq 0, \quad \forall \theta \in [0, \pi].$$

提示: 注意 $g(r, \theta) = \sum_{k=1}^n k a_k r^k \sin k\theta$ 是单位圆盘中的调和函数.

证明. □

18. 设 $D$ 是域,  $a \in D$ . 证明: 若 $u$ 在 $D$ 上连续, 在 $D \setminus \{a\}$ 上调和, 则 $u$ 在 $D$ 上调和.

证明. □

19. (**Jensen公式**) 设 $f \in H(\overline{B(0, r)})$ ,  $a_1, \dots, a_m$ 是 $f$ 在 $B(0, r)$ 中的零点, 重零点按重数重复计算, 但 $f(0) \neq 0$ . 证明:

$$\log |f(0)| = - \sum_{k=1}^m \log \frac{r}{|a_k|} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

提示: 考虑函数 $g(z) = f(z) \prod_{k=1}^m \frac{r^2 - \overline{a_k} z}{r(z - a_k)}$ .

证明. [1]P<sub>244</sub> □

## 8.2 圆盘上的Dirichlet问题

1. 设 $D$ 是异于 $\mathbb{C}$ 的单连通域. 证明: 对于任意 $\zeta \in D$ , 若 $f_\zeta(z)$ 是将 $D$ 映为 $B(0, 1)$ 的双全纯映射,  $f_\zeta(\zeta) = 0, f'_\zeta(\zeta) > 0$ , 则 (i)  $\log |f_\zeta(z)| = \log |f_\zeta(\zeta)|, \forall \zeta, z \in D$ ; (ii)  $\lim_{z \rightarrow z_0} \log |f_\zeta(z)| = 0, \forall z_0 \in \partial D, \zeta \in D$ ; (iii) 对于固定的 $\zeta \in D$ ,  $\log |f_\zeta(z)| - \log |z - \zeta|$ 作为 $z$ 的函数在 $D$ 上调和.

证明. □

2. 设 $D$ 是域, 若 $g: \overline{D} \times \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 (i)  $g(z, \zeta) = g(\zeta, z), \forall (z, \zeta) \in \overline{D} \times \overline{D}$ ; (ii)  $g$ 在 $(\overline{D} \times \partial D) \cup (\partial D \times \overline{D})$ 上恒为零; (iii) 对于固定的 $\zeta \in \overline{D}$ ,  $g(z, \zeta) + \log |z - \zeta|$ 作为 $z$ 的函数在 $D$ 上调和, 在 $\overline{D}$ 上连续, 则称 $g$ 是域 $D$ 的**Green函数**. 证明: 异于 $\mathbb{C}$ 的单连通域必有Green函数, 并且是唯一的.

证明. □

3. 证明: 若 $g$ 是 $B(0, R)$ 的Green函数, 则

$$P(z, Re^{i\theta}) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\partial g(z, rRe^{i\theta})}{\partial r}, \quad z \in B(0, R).$$

由此也可得到 $B(0, R)$ 的Poisson积分公式和Dirichlet问题的解.

证明. □

4. 证明:  $B(0, 1) \setminus \{0\}$ 的Dirichlet问题不可解.

证明. □

5. (**Weierstrass 一致逼近定理**) 设 $f$ 是 $\partial B(0, R)$ 上的复连续函数. 证明: 对于任意 $n \in \mathbb{N}$ , 必存在 $z$ 的 $n$ 次多项式 $P_n(z)$ 和 $\bar{z}$ 的 $n$ 次多项式 $Q_n(\bar{z})$ , 使得 $\{P_n(z) + Q_n(\bar{z})\}$ 在 $\partial B(0, R)$ 上一致收敛于 $f(z)$ .

证明. □

6. 设 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 为 $\partial B(0, R)$ 上两段互余的开圆弧, 试求 $B(0, R)$ 中的调和函数 $u$ , 使得当 $\zeta \in \gamma_1$ 时,  $u(\zeta) = 0$ ; 当 $\zeta \in \gamma_2$ 时,  $u(\zeta) = 1$ . 并由此证明存在 $f \in H(B(0, R))$ , 使得当 $\zeta \in \gamma_1$ 时,  $|f(\zeta)| = 1$ ; 当 $\zeta \in \gamma_2$ 时,  $|f(\zeta)| = e$ .

证明. □

### 8.3 上半平面的Dirichlet问题

1. 求出上半平面 $D$ 的Green函数 $g$ , 并证明: 若

$$P(z, t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial g(z, t + si)}{\partial s}, z \in D, t \in \mathbb{R},$$

则

$$u(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P(z, t) f(t) dt$$

是上半平面以 $f(t)$ 为边界值的Dirichlet问题的解.

证明.

□

2. 设 $D$ 是由简单闭曲线围成的单连通域. 证明:  $D$ 的Dirichlet问题可解, 并且解是唯一的.

证明.

□

3. 求出解上半单位圆盘Dirichlet问题的具体公式.

证明.

□



## 8.4 次调和函数

1. 证明: 若 $u$ 在域 $D$ 上次调和, 则对于任意 $z_0 \in D$ , 成立

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} u(z) = u(z_0).$$

证明.

□

2. 证明: 域 $D$ 上非常数的次调和函数不能在 $D$ 内部取得最大值. 举例说明, 域 $D$ 上非常数的次调和函数能在 $D$ 内部取得极大值.

证明.

□

3. 证明: 若 $u$ 是域 $D$ 上非常数的连续次调和函数, 则 $u(D)$ 是右开的区间.

证明.

□

4. 证明: 若 $u$ 是 $B(0, R)$ 上的连续次调和函数, 则

$$m(r) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B(0,r)} u(z) \, dx \, dy$$

是 $(0, R)$ 上的增加函数.

证明. 参看[13]P<sub>28</sub>定理1.5.6.

□

5. 举例说明, 存在域 $D$ 上的上半连续函数 $u$ , 其不能在 $D$ 内部取得最大值, 但它不是 $D$ 上的次调和函数. 这表明, 最大值原理不是次调和函数的特征性质.

证明.

□

6. 证明: 域 $D$ 上有限个次调和函数的和仍然是 $D$ 上的次调和函数.

证明.

□

7. 证明: 若 $\{u_n\}$ 是域 $D$ 上单调减少的次调和函数列, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \neq -\infty$ , 则 $u$ 也是 $D$ 上的次调和函数.

证明. 参看[13]P<sub>244</sub>引理5.4.9.

□

8. 设 $u_n$ 是域 $D$ 上的次调和函数列. 证明: 若 $\sup_{n \geq 1} u_n = u \neq \infty$ , 并且 $u$ 是 $D$ 上的上半连续函数, 则 $u$ 也是 $D$ 上的次调和函数.

证明. □

9. 证明: 若 $u$ 在域 $D$ 上调和, 则对于任意 $p \geq 1$ ,  $|u|^p$ 在 $D$ 上次调和.

证明. 参看[13] $P_{28}$ 命题1.5.7. □

10. (次调和函数的Hadamard三圆定理) 设 $0 < r_1 < r_2 < \infty$ ,  $D = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$ ,  $u$ 在 $D$ 上次调和, 在 $\bar{D}$ 上连续,  $A(r) = \max_{|z|=r} u(z)$  ( $r_1 \leq r \leq r_2$ ). 证明:  $A(r)$ 在 $[r_1, r_2]$ 上是 $\log r$ 的凸函数, 即

$$A(r) \leq \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} A(r_1) + \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} A(r_2).$$

证明. □

11. 设 $D, G$ 是域,  $u$ 是 $G$ 上的次调和函数. 证明: 若 $\varphi: D \rightarrow G$ 全纯, 则 $u \circ \varphi$ 是 $D$ 上的次调和函数.

证明. 参看[13] $P_{26}$ 命题1.5.2. □

12. 设 $D$ 是凸域,  $f \in H(D)$ . 证明: 若 $\operatorname{Re} \bar{z} f(z)$ 是 $D$ 上的次调和函数, 则或者 $f$ 是常值函数, 或者 $f$ 是 $D$ 上的双全纯映射.

证明. □

13. 设 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 是 $n$ 条可求长曲线,  $u$ 是域 $D$ 上的连续函数. 若 $u$ 在开集 $D \setminus (\bigcup_{k=1}^n \gamma_k)$ 上次调和, 问 $u$ 是否在 $D$ 上次调和? (提示: 举例说明答案是否定的.)

证明. □

14. 设 $v$ 是有界域 $D$ 上的次调和函数,  $u$ 是 $D$ 上的调和函数. 证明: 若存在 $z_1, z_2, \dots, z_n \in \partial D$ , 使得

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} [v(z) - u(z)] &\leq 0, \quad \forall z_0 \in \partial D \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}; \\ \overline{\lim}_{z \rightarrow z_k} [v(z) - u(z)] &< \infty, \quad k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

则

$$v(z) \leq u(z), \quad \forall z \in D.$$

证明. 参看[13] $P_{27}$ 定理1.5.5. □

15. (两常数定理) 设 $\gamma, \Gamma$ 是 $\partial B(0, 1)$ 上两段不相交的开圆弧, 其长度分别为 $2\alpha\pi$ 和 $2(1 - \alpha)\pi$ ,  $f$ 是 $B(0, 1)$ 上的有界全纯函数. 证明: 若存在 $m, M > 0$ , 使得

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} |f(z)| \leq m, \quad \forall z_0 \in \gamma;$$

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} |f(z)| \leq M, \quad \forall z_0 \in \Gamma,$$

则

$$|f(0)| \leq m^\alpha M^{1-\alpha}.$$

由此可得到 $|f(z)|$ 的什么样的估计?

提示: 参考习题8.2的第6题.

证明.

□



## 第9章 多复变数全纯函数与全纯映射

### 9.1 多复变数全纯函数的定义

1. 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的域,  $f \in H(\Omega)$ . 如果存在 $a \in \Omega$ , 使得 $(D^\alpha f)(a) = 0$ 对所有多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 成立, 证明在 $\Omega$ 上 $f(z) \equiv 0$ .

证明.

□

2. 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的域,  $f_1, \dots, f_m \in H(\Omega)$ . 如果 $\sum_{j=1}^m |f_j(z)|^2$ 在 $\Omega$ 上为一常数, 证明 $f_1, \dots, f_m$ 都是常数.

证明.

□

3. 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的域,  $f, g \in H(\Omega)$ . 如果 $f(z)g(z) \equiv 0$ 在 $\Omega$ 上成立, 证明 $f$ 或 $g$ 必在 $\Omega$ 上恒等于零.

证明.

□

4. 证明定理9.1.6.

证明.

□

## 9.2 多圆柱的Cauchy积分公式

1. 设 $P(a, r)$ 是一个多圆柱, 试利用多圆柱上的Cauchy积分公式证明: 若 $f \in C(\overline{P(a, r)}) \cap H(P(a, r))$ , 则 $f$ 的最大模必在 $\partial_0 P$ 上取到.

证明.

□

2. 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的域,  $\overline{P(a, r)} \subset \Omega$ . 如果 $f \in H(\Omega)$ , 那么对任意多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , 有

$$|(D^\alpha f)(a)| \leq \frac{\alpha!(\alpha_1 + 2) \cdots (\alpha_n + 2)}{(2\pi)^{n_1 \alpha + 2}} \|f\|_{L^1(P(a, r))},$$

这里

$$\|f\|_{L^1(P(a, r))} = \int_{P(a, r)} |f(z)| dm(z),$$

$dm(z)$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的测度.

证明.

□

3. 设 $f$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的有界全纯函数, 证明 $f$ 必为常数.

证明.

□

4. 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的域,  $\{f_k\}$ 是 $\Omega$ 上一列处处不为零的全纯函数. 如果 $\{f_k\}$ 在 $\Omega$ 上内闭一致收敛于 $f$ , 那么 $f$ 在 $\Omega$ 中或者恒等于零, 或者处处不等于零.

证明.

□

### 9.3 全纯函数在Reinhardt域上的展开式

1. 记  $A(B_n) = H(B_n) \cap C(\overline{B_n})$ ,  $n > 1$ .

(i) 设  $f \in A(B_n)$ , 如果  $f$  在  $\partial B_n$  上处处不为零, 证明  $f$  在  $B_n$  中也处处不为零;

(ii) 设  $f \in A(B_n)$ , 证明  $f(\overline{B_n}) = f(\partial B_n)$ ; (iii) 举例说明, 上述结论在  $n = 1$  时不成立.

证明.

□

2. 设  $f \in A(B_n)$ ,  $n > 1$ . 如果  $|f|$  在球面  $\partial B_n$  上恒等于常数  $c$ , 那么  $f$  在  $B_n$  中也恒等于常数  $c$ . 举例说明  $n = 1$  时结论不成立.

证明.

□

3. 设  $0 < \alpha, \beta < 1$ , 记

$$G_1 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, \beta < |w| < 1\},$$

$$G_2 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < \alpha, |w| < 1\},$$

令  $G = G_1 \cup G_2$ . 证明:  $H(G)$  中的每一个函数都能全纯开拓到双圆柱域

$$U^2 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1\}.$$

证明.

□

## 9.4 全纯映射的导数

1. 设  $f$  是  $\mathbb{C}$  上的一个整函数, 满足  $f(0) = f'(0) = 0$ . 令  $F(z_1, z_2) = (z_1, z_2 + f(z_1))$ ,  $I_2$  为 2 阶单位方阵. 证明:

$$F(0) = 0, F'(0) = I_2.$$

证明. □

2. 设  $\Omega = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1 z_2| < 1\}$ , 任取  $h : U \rightarrow \mathbb{C}$  为  $U$  中处处不为零的全纯函数, 这里,  $U$  表示单位圆盘. 令

$$F_h(z_1, z_2) = \left( z_1 h(z_1 z_2), \frac{z_2}{h(z_1 z_2)} \right).$$

证明: (i)  $F_h(0) = 0$ ; (ii)  $(F_h)^{-1} = F_{\frac{1}{h}}$ ; (iii) 如果  $h(0) = 1$ , 那么  $F'_h(0) = I_2$ .

证明. □

3. 设  $\Omega$  是  $\mathbb{C}^n$  中的域,  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$  是全纯映射. 设  $F = (f_1, \dots, f_n)$ ,  $f_j = u_j + iv_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . 记

$$(JF)(z) = \det F'(z),$$

$$(J_{\mathbb{R}} F)(z) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial(u_1, \dots, u_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} & \frac{\partial(u_1, \dots, u_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \\ \frac{\partial(v_1, \dots, v_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} & \frac{\partial(v_1, \dots, v_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \end{pmatrix},$$

前者称为  $F$  的复 Jacobian, 后者称为  $F$  的实 Jacobian. 证明:

$$(J_{\mathbb{R}} F)(z) = |(JF)(z)|^2.$$

证明. 参看 [13]  $P_{48}$  命题 2.1.5. □

4. 设  $\Omega$  是  $\mathbb{C}^n$  中的域,  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$  是全纯映射. 如果存在  $a \in \Omega$ , 使得  $F'(a)$  可逆, 那么一定存在  $a$  和  $F(a)$  的邻域  $V$  和  $W$ , 使得  $F$  一地把  $V$  映为  $W$ , 而且  $F$  的逆映射  $G : W \rightarrow V$  是全纯的, 等式

$$G'(w) = (F'(z))^{-1}$$

对  $z \in V$  成立.

证明. 参看 [13]  $P_{49}$  定理 2.2.1. □

## 9.5 Cartan定理

1. 由习题9.4中的第1, 2两题说明, 定理9.5.1和定理9.5.4中域 $\Omega$ 和 $\Omega_1$ 有界的条件是不能去掉的.

证明. □

2. 设 $F = (f_1, f_2) : U^2 \rightarrow B_2$ 是双全纯映射. (i) 证明: 对于任意 $\{z_k\} \subset U$  ( $U$ 是单位圆盘),  $|z_k| \rightarrow 1$ , 必有子列 $\{z_{k_v}\}$ , 使得

$$\lim_{v \rightarrow \infty} F(z_{k_v}, w) = \varphi(w),$$

其中,  $\varphi$ 是常数映射, 即 $\varphi(w) = (c_1, c_2)$ ; (ii) 由此证明 $F$ 不存在, 即不存在把 $U^2$ 一一地映为 $B_2$ 的双全纯映射.

证明. □

3. 设 $f \in \text{Aut}(U^n)$ ,  $U^n$ 是单位多圆柱. (i) 如果 $f(0) = 0$ , 那么一定存在实数 $\theta_1, \dots, \theta_n$ 和置换 $\tau : (1, \dots, n) \rightarrow (1, \dots, n)$ , 使得

$$f(z) = (e^{i\theta_1} z_{\tau(1)}, \dots, e^{i\theta_n} z_{\tau(n)});$$

(ii) 如果 $f(a) = 0, a \neq 0$ , 那么一定存在实数 $\theta_1, \dots, \theta_n$ 和置换 $\tau : (1, \dots, n) \rightarrow (1, \dots, n)$ , 使得

$$f(z) = \left( e^{i\theta_1} \frac{z_{\tau(1)} - a_1}{1 - \overline{a_1} z_{\tau(1)}}, \dots, e^{i\theta_n} \frac{z_{\tau(n)} - a_n}{1 - \overline{a_n} z_{\tau(n)}} \right).$$

证明. 参看[13]P<sub>60</sub>定理2.3.7. □

## 9.6 球的全纯自同构和Poincaré定理

1. 对于任意  $z, w \in B_n$ , 证明:

$$|\varphi_z(w)| = |\varphi_w(z)|.$$

证明. □

2. 设  $a, z, w \in B_n$ , 证明:

$$|\varphi_{\varphi_a(w)}(z)| = |\varphi_w(\varphi_a(z))|.$$

(提示: 考虑映射  $\varphi_{\varphi_a(w)} \circ \varphi_a \circ \varphi_w$ .)

证明. □

3. 定义  $E(a, r) = \varphi_a^{-1}(B(0, r)) = \{z : |\varphi_a(z)| < r\}$ . 证明: 对任意  $a, z \in B_n, 0 < r < 1$ , 有

$$\varphi_a(E(z, r)) = E(\varphi_a(z), r).$$

证明. □

4. 设  $F \in H(B_n), F = f \circ \varphi_z$ . 证明: (i)  $(\nabla F)(0) = (\nabla f)(z)\varphi'_z(0)$ , 这里

$$(\nabla f)(z) = \left( \frac{\partial f(z)}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f(z)}{\partial z_n} \right);$$

(ii)  $|(\nabla F)(0)|^2 = (1 - |z|^2)[|(\nabla f)(z)|^2 - |(\mathbf{R}f)(z)|^2]$ , 这里,  $(\mathbf{R}f)(z) = \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial f(z)}{\partial z_j}$  是  $f$  的径向导数.

证明. □

5. 设  $\psi \in \text{Aut}(B_n)$ , 如果  $\psi(a) = 0$ , 那么对任意  $z, w \in \overline{B_n}$ , 有等式

$$1 - \psi(z)\overline{\psi(w)'} = \frac{(1 - |a|^2)(1 - z\overline{w'})}{(1 - \overline{a}z')(1 - a\overline{w'})}.$$

证明. □

6. 设  $\psi \in \text{Aut}(B_n)$ . 如果  $\psi$  在  $\partial B_n$  上有三个不同的不动点, 证明  $\psi$  在  $B_n$  中至少有一个不动点.

(提示: 设  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  是  $\psi$  在  $\partial B_n$  上的三个不动点, 令  $z_0 = \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2)$ , 先证明  $\varphi_a(z_0) = \frac{1}{2}(\varphi_a(\zeta_1) + \varphi_a(\zeta_2))$ , 这里  $a = \psi^{-1}(0)$ , 然后再证明  $\psi(z_0) = z_0$ .)

证明. □

# 索引

## A

Abel判别法, 98  
Abel变换, 98  
Abel定理, 112  
Apollonius圆, 9

## B

Bernoulli数, 121  
Bessel函数, 157  
Bolzano-Weierstrass定理, 23  
保域性定理, 133  
边界值, 31  
边界对应原理, 247  
边界对应原理的特例, 132  
闭映射定理, 29

## C

Carathéodory不等式, 138  
Cauchy不等式, 3  
Cauchy积, 106  
Cayley变换, 87  
插值定理, 233  
插值定理的推广, 230  
次调和函数的Hadamard三圆定理, 256

## D

De Morgan律, 22  
Dirichlet判别法, 98

Dirichlet级数, 105  
典范乘积, 232  
单位分解定理, 94  
单值连续分支, 27

## E

$\varepsilon$ -连通, 26  
Eneström-Kakeya定理, 126  
Euler数, 121

## F

Fibonacci数, 122  
复Jacobian, 261  
辐角原理, 133

## G

Green公式, 91  
Green函数, 253  
广义组合数, 155  
高阶奇异积分, 201

## H

Harnack定理, 251  
Hölder条件, 201

## J

Jensen公式, 252  
交比, 54

## K

- Koebe函数, 165  
 Kronecker记号, 109  
 亏格, 232  
 开映射定理, 133
- L
- Lagrange等式, 3  
 Laplace公式, 80  
 Laplace积分, 198  
 Legendre多项式, 80  
 Lindelöf定理, 150  
 两常数定理, 257  
 连通分支, 26
- M
- Möbius变换群, 176  
 母函数, 114  
 磨光函数, 96  
 面积原理, 159
- P
- Painlevé原理, 88  
 Phragmén定理, 150  
 Picard大定理, 86  
 Picard小定理, 86  
 Poisson积分公式, 84  
 偏差定理, 162
- Q
- 全纯函数的Hadamard三圆定理, 136  
 群, 174
- R
- Raabe判别法, 102  
 Riemann定理, 166  
 Rokovsky函数, 47
- S
- $\mathcal{S}$ 类, 161  
 Schwarz积分公式, 82  
 Stirling公式, 106  
 三直线定理, 136  
 实Jacobian, 261  
 实解析函数, 123
- T
- 同胚映射, 29  
 推广的Liouville定理, 245  
 推广的Schwarz引理, 142  
 推广的留数定理, 201  
 调和函数的Hadamard三圆定理, 251  
 调和测度, 148
- V
- Vitali定理, 243
- W
- Weierstrass 一致逼近定理, 253  
 Weierstrass因子分解定理, 231  
 无界域的Cauchy积分公式, 78  
 无界域的最大模原理, 137
- X
- 小 $o$ Tauber定理, 112
- Y
- $\frac{1}{4}$ 掩盖定理, 162  
 一一连续映射, 29  
 亚纯函数, 169  
 余元公式, 205  
 映射半径, 245  
 有界变差, 67

## Z

增长定理, [162](#)

正规子群, [175](#)

## 参考文献

- [1] Walter Rudin. 实分析与复分析.第三版. 北京: 机械工业出版社, 2006.
- [2] Lars V. Ahlfors. 复分析. 北京: 机械工业出版社, 2005.
- [3] 余志坤, 全国大学生数学竞赛命题组. 全国大学生数学竞赛解析教程. 数学专业类. 上册. 北京: 科学出版社, 2024.
- [4] 方企勤. 复变函数教程. 北京: 北京大学出版社, 2017.
- [5] 谢惠民, 恽自求, 易法槐, 钱定边. 数学分析习题课讲义.第二版.下册. 北京: 高等教育出版社, 2021.
- [6] 徐森林. 实变函数论. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2003.
- [7] 王作勤. 拓扑学讲义. 合肥: 中国科学技术大学, 2022.
- [8] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程.第三版.上册. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2018.
- [9] 龚昇. 简明复分析. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2009.
- [10] 钟玉泉. 复变函数论.第五版. 北京: 高等教育出版社, 2024.
- [11] 史济怀, 刘太顺. 复变函数. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2020.
- [12] Elias M. Stein, Rami Shakarchi. 复分析. 北京: 机械工业出版社, 2021.
- [13] 史济怀. 多复变函数论基础. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [14] 潘承洞, 于秀源. 阶的估计基础. 北京: 高等教育出版社, 2015.
- [15] 余家荣, 柏盛桃, 肖修治, 何育赞, 路见可. 复变函数专题选讲. 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [16] 丘维声. 近世代数. 北京: 北京大学出版社, 2024.